Dieu

Règles pour reconnaître l'espèce d'une surface du second ordre à centre unique, non situé sur la surface, en n'employant que les sections par les plans coordonnés, et dans certains cas le diamètre conjugué à l'une d'elles ou le signe du déterminant du centre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 408-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__408_0>

RÈGLES

pour reconnaître l'espèce d'une surface du second ordre à centre unique, non situé sur la surface, en n'employant que les sections par les plans coordonnés, et dans certains cas le diamètre conjugué à l'une d'elles ou le signe du déterminant du centre;

Par M. DIEU,
Professeur à la Faculté de Lyon.

I. Les sections elliptiques par des plans passant par le centre sont *réelles* pour l'ellipsoïde réel et pour l'hyperboloïde à une nappe, *imaginaires* pour l'hyperboloïde à deux nappes et pour l'ellipsoïde imaginaire.

Les sections paraboliques des hyperboloïdes par des plans contenant le centre se réduisent toujours à deux droites parallèles, et ces droites sont *réelles* ou *imaginaires* selon que l'hyperboloïde est à une nappe ou à deux nappes.

La première de ces deux remarques est évidente d'elle-même, la seconde se démontre comme il suit.

Les deux hyperboloïdes sont compris dans l'équation

$$x^2 + Py^2 - P'z^2 = G,$$

P', G étant des quantités positives et P une quantité positive ou négative selon que l'hyperboloïde est à une nappe ou à deux nappes. — Un plan $y = mz$ donne

$$(1) \qquad x^2 + (Pm^2 - P')z^2 = G$$

qui représente deux droites réelles pour $m = \pm\sqrt{\frac{P'}{P}}$ quand l'hyperboloïde est à une nappe, mais qui ne peut représenter qu'une hyperbole dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes. — Un plan $x = \alpha y + \beta z$ donne

$$(2) \qquad (\alpha^2 + P)y^2 + 2\alpha\beta yz + (\beta^2 - P')z^2 = G,$$

et la section sera parabolique si l'on a

$$P'\alpha^2 - P\beta^2 + PP' = 0;$$

mais on tire de là

$$\alpha^2 + P = \frac{P\beta^2}{P'}, \quad \beta^2 - P' = \frac{P'\alpha^2}{P},$$

en sorte que l'équation précédente se ramène à

$$\left(\beta y + \frac{P'\alpha}{P} z\right)^2 = \frac{P'G}{P};$$

la section se compose donc de deux droites qui sont réelles ou imaginaires selon que P est positif ou négatif.

On voit qu'une section hyperbolique ne peut se réduire à deux droites concourantes, car une équation telle que (1) ou (2) ne peut présenter ce cas particulier à moins d'avoir son second membre nul.

II. Quand une surface du second ordre est à centre unique, qu'on l'a rapportée à trois axes passant par ce point et qu'il n'est pas sur la surface, l'examen des sections par les plans coordonnés fait immédiatement reconnaître la nature de la surface dans deux cas :

1° *Une parabole :* la surface est un hyperboloïde à une nappe si la parabole est réelle ; la surface est un hyperboloïde à deux nappes si la parabole est imaginaire.

2° *Une ellipse et une hyperbole* : la surface est un hyperboloïde à une nappe si l'ellipse est réelle ; la surface est une hyperboloïde à deux nappes si l'ellipse est imaginaire.

Remarque. — Le lieu d'une équation du second degré de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = G,$$

pour laquelle on a

$$B^2 - 4AC \lesseqq 0,$$

est réel ou imaginaire selon que A et G sont de même signe ou de signes contraires.

D'après une seule des sections par les plans coordonnés, en laissant le cas de la parabole qui fixe la nature de la surface, on a les alternatives suivantes :

1° *Une ellipse réelle :* la surface est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe ;

2° *Une ellipse imaginaire :* la surface est un hyperboloïde à deux nappes ou un ellipsoïde imaginaire ;

3° *Une hyperbole :* la surface est un des deux hyperboloïdes.

On voit que l'ambiguïté subsiste même après examen des trois sections, si elles sont trois ellipses ou trois hyperboles.

III. Une section elliptique ou hyperbolique par un des plans coordonnés (*) et l'espèce du diamètre conjugué à ce plan (*réel ou imaginaire*) font toujours connaître d'une manière précise la nature d'une surface du second ordre :

1° *Une ellipse réelle avec le diamètre conjugué réel :* ellipsoïde réel ;

2° *Une ellipse réelle avec le diamètre conjugué imaginaire ; une hyperbole avec le diamètre conjugué réel :* hyperboloïde à une nappe ;

3° *Une ellipse imaginaire avec le diamètre conjugué*

(*) Si l'on obtient une parabole, il n'y a pas de doute (II).

réel; *une hyperbole avec le diamètre conjugué imaginaire :* hyperboloïde à deux nappes;

4° *Une ellipse imaginaire avec le diamètre conjugué imaginaire :* ellipsoïde imaginaire.

On sait en effet, dans chaque cas, combien la surface a de diamètres réels ou imaginaires sur trois diamètres conjugués.

Détermination de l'espèce du diamètre conjugué à un des plans coordonnés. — Soient

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2By z + 2B'zx + 2B''xy = G$$

l'équation de la surface, et

$$x = mz, \quad y = nz$$

celles d'un diamètre; l'équation du plan conjugué est

$$(Am + B''n + B')x + (B''m + A'n + B)y \\ + (B'm + Bn + A'')z = 0.$$

Pour que ce plan soit, par exemple, celui des xy, il faut déterminer m, n par les équations

$$(1) \qquad Am + B''n + B' = 0, \quad B''m + A'n + B = 0.$$

Les z des points réels ou imaginaires communs à la surface et à la droite $x = mz$, $y = nz$ sont donnés en général par l'équation

$$(2)\,(Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn)\,z^2 = G;$$

mais m, n étant déterminés par les équations (1) d'où l'on tire

$$Am^2 + A'n^2 + 2B''mn = -Bn - B'm,$$

l'équation (2) se réduit à

$$(3) \qquad (B'm + Bn + A'')\,z^2 = G.$$

Donc, *selon que* $B'm + Bn + A''$ *prend une valeur de* *même signe que* G *ou de signe contraire, pour les valeurs de* m, n *déduites des équations* (1), *le diamètre conjugué au plan des* xy *est réel ou imaginaire.*

Remarque I. — On ne pourrait faire ce calcul si l'on avait $B''^2 - AA' = 0$; mais il serait inutile dans ce cas.

Remarque II. $B'm + Bn + A''$ ne peut pas être nul pour les valeurs de m, n tirées des équations (1), puisque le déterminant des équations du centre est différent de zéro par hypothèse. Ce déterminant étant désigné par D, l'équation (3) donne en effet la formule

$$(4) \qquad D z^2 = G\,(B''^2 - AA').$$

IV. Il suffit de changer z en y ou x, et $B''^2 - AA'$ en $B'^2 - AA''$ ou $B^2 - A'A''$ dans la formule (4), pour avoir celles qui se rapportent aux plans des zx et des yz. — Donc :

Le diamètre conjugué à l'un des plans coordonnés est réel ou imaginaire selon que le produit DG *est de même signe que le binôme correspondant à ce plan ou de signe contraire.*

RÉSUMÉ.

1° Un binôme négatif; G de même signe que les coefficients A,..., de ce binôme; $DG < 0$:

Ellipsoïde réel.

2° Un binôme négatif; G de même signe que les coefficients A...; $DG > 0$;

Un binôme positif; $DG > 0$;

Un binôme nul, G de même signe que les coefficients A... :

Hyperboloïde à une nappe.

3° Un binôme négatif; G de signe contraire aux coefficients A...; $DG < 0$;

Un binôme positif; $DG < o$;
Un binôme nul; G de signe contraire aux coefficients A :
Hyperboloïde à deux nappes.

4° Un binôme négatif; G de signe contraire aux coefficients A...; $DG > o$:
Ellipsoïde imaginaire.