Nouvelles annales de mathématiques

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 39-44

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__39_1>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 715

(voir 2e série, t. III, p. 445);

PAR M. GILLIOT,
Elève du lycée de Strasbourg.

Le lieu des foyers des paraboles normales à une droite et qui la coupent en deux points fixes, est une cissoïde. (MENTION.)

Je prends pour axe des x la droite donnée, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite, menée par le point où la première est normale à la parabole. Si (α, β) désignent les coordonnées d'un foyer quelconque, l'équation d'une parabole satisfaisant à ces conditions pourra être mise sous la forme

$$\begin{gathered}(1-m^2)x^2 - 2mnxy + (1-n^2)y^2 \\ -2(\alpha + mp)x - 2(\beta + np)y + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0,\end{gathered}$$

pourvu que les relations suivantes soient vérifiées :

$$m^2 + n^2 = 1, \tag{1}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0, \tag{2}$$

$$\beta + np = 0. \tag{3}$$

La première de ces équations exprime que la courbe est une parabole, et les deux autres assujettissent la parabole à toucher à l'origine l'axe des y.

Soit maintenant a l'abscisse du point où la parabole doit rencontrer encore l'axe des x ; j'aurai, en exprimant que les coordonnées (a, o) vérifient l'équation de la parabole, une quatrième relation entre les paramètres m, n, p, et les coordonnées α, β d'un point du lieu :

$$(4) \qquad a(1 - m^2) - 2(\alpha + mp) = 0.$$

J'aurai donc l'équation du lieu cherché en éliminant les paramètres m, n, p entre ces quatre relations. Des trois premières, je tire

$$p^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad n^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad m^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

La relation (4) devient alors

$$a \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - 4\alpha = 0.$$

En remplaçant α et β par x et y, nous aurons pour équation du lieu

$$y^2 = \frac{4x^3}{a - 4x},$$

ou encore

$$y^2 = \frac{x^3}{\frac{a}{4} - x}.$$

Sous cette forme, on reconnaît une cissoïde dont le diamètre du cercle générateur est $\frac{a}{4}$ et dont l'asymptote a pour équation $x = \frac{a}{4}$.

Note. — Autres solutions analytiques de MM. Audoynaud, professeur au lycée de Poitiers; Lacauchie, élève de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard); Bertrand et Grassat, élèves du lycée de Lyon; Bailly, répétiteur au lycée d'Orléans; E. Dubois et L. Masquelier, Delory, élèves du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser); Alphonse Aubrun, Georges Glasser, Ed. Widemann, elèves du lycée de Strasbourg; Albert Ribeaucourt, élève du lycée de Lille; Eugène Margot, du lycée de Grenoble; Smith junior, elève du lycée Louis-le-Grand; Louis Pabon, élève du lycée de Bordeaux.

Même question;

PAR M. DURGET,
Élève du lycée de Besançon.

Je suppose que l'on ait tracé la tangente correspondant à la normale fixe AB, de même qu'une seconde tangente perpendiculaire à la première en T. La corde des contacts de ce système rectangulaire passe par le foyer de la parabole. Achevons alors le rectangle en menant par le point de contact A′ de la seconde tangente une perpendiculaire à la normale, puis, du point T et de son opposé T′, abaissons des perpendiculaires TF, T′R sur la corde des contacts. Enfin traçons le cercle qui a pour diamètre AT′ et qui passe en R. On sait que la ligne TF passe par le foyer, et que AT′ est constant et égal au quart de AB; d'ailleurs il est évident que RA′ = FA.

Ainsi cette génération, à l'aide d'une parabole, revient à la génération connue de la cissoïde, à l'aide d'une droite et d'un cercle.

Note. — Autres solutions géométriques de MM. Thürninger, élève du lycée Saint-Louis; Vieira et Jamin, élèves de l'École Polytechnique; Gazères et La Rougery, élèves du lycée de Bordeaux; de Vigneral; A. D., R., élèves du lycée Charlemagne.

Questions 706 *et* 707

(voir 2e série, t. III, p. 252);

PAR M. A. SARTIAUX,
Élève de l'École Polytechnique.

On donne sur un plan deux circonférences (O), (O′).

Par un point fixe A *de la première, on trace une conique* (C) *tangente en ce point à cette circonférence et doublement tangente à la seconde* (O′). *Cette conique* (C) *rencontre* (O) *aux points* D *et* E; *la droite* DE *coupe la corde de contact de* (C) *et de* (O′) *en un point* M : *lorsque l'on considère toutes les coniques* (C), *le lieu de ce point est une circonférence.* (Mannheim.)

Je prends le point A pour origine, pour axe des x la tangente menée par le point A à la circonférence (O), la perpendiculaire pour axe des y. Les équations des deux circonférences seront :

$$(O) \qquad x^2+y^2-2ry=0,$$
$$(O') \qquad x^2+y^2-2ax-2by-c^2=0.$$

L'équation d'une conique doublement tangente à la circonférence (O′) est

$$x^2+y^2-2ax-2by-c^2+(mx+ny+p)^2=0;$$

$mx+ny+p=0$ est l'équation de la corde des contacts. L'équation développée de la conique est

$$x^2(1+m^2)+y^2(1+n^2)+2mnxy-2x(a-mp)$$
$$-2y(b-np)-c^2+p^2=0.$$

La conique passe au point A et a pour tangente Ax, donc

$$p^2=c^2 \quad \text{et} \quad a=mp.$$

L'équation de la conique est alors

$$x^2(1+m^2)+y^2(1+n^2)+2mnxy-2y(b-np)=0.$$

Entre cette équation et l'équation du cercle (O), j'élimine x^2 : j'ai l'équation d'une conique passant par l'intersection de (C) et de (O) qui est

$$y^2(n^2-m^2)+2mnxy-2y[b-np-r(1+m^2)]=0.$$

C'est un système de deux droites; l'une d'elles est l'axe des x, l'autre est la droite DE, et a pour équation

$$y(n^2 - m^2) + 2mnx - 2[b - np - r(1 + m^2)] = 0.$$

Le point M se trouve sur cette droite, et sur la droite des contacts

$$mx + ny + p = 0.$$

Entre ces deux équations, j'élimine n, et j'obtiens, en remplaçant mp par a et p^2 par c^2,

$$m^2(x^2 + y^2) + 2ax + 2y(b - r) - 2m^2ry + c^2 = 0,$$

équation d'un cercle ayant même axe radical que (O) et (O′).

Si nous cherchions l'enveloppe de la droite DE, nous trouverions la même équation.

En effet, l'équation de DE est, en ordonnant par rapport à n,

$$n^2y + 2n(mn + p) - m^2y - 2b + 2r(1 + m^2) = 0.$$

L'équation de l'enveloppe est

$$(mx + p)^2 = y[2r(1 + m^2) - m^2y - 2b]$$

u

$$m^2(x^2 + y^2) + 2ax + 2y(b - r) - 2m^2ry + c^2 = 0,$$

et l'équation de l'axe radical des cercles (O), (O′) et du cercle trouvé est

$$2ax + 2y(b - r) + c^2 = 0.$$

Je transforme par polaires réciproques en prenant pour pôle de transformation l'un des points limites du système des cercles ayant même axe radical que (O) et (O′). Alors (O) et (O′) se transforment en deux coniques biconfocales, (O_1) et (O'_1); (C) se transforme en une conique

(C_1) doublement tangente à (O'_1) et tangente à (O_1) en un point fixe; DE se transforme en le point d'intersection des tangentes communes à (C_1) et (O_1); or DE enveloppe un cercle ayant même axe radical que (O) et (O'), donc le point d'intersection des tangentes communes à (C_1) et (O_1) enveloppe la transformée de ce cercle, c'est-à-dire une conique homofocale aux coniques (O_1) et (O'_1). C'est précisément la question 707.

Remarque. — Dans le premier problème on peut supposer nul le rayon du cercle (O'); alors les coniques (C) ont un foyer commun, et le point M est sur la directrice correspondante à ce foyer. Il est facile de trouver l'énoncé du théorème relatif à ce cas.

Note. — La question 706 a été résolue par MM. Léon Bailly, répétiteur au lycée d'Orléans; Michel Lhopital, Léon Dyrion, H. Picquet, élèves de l'École Polytechnique; Aubrun, Gilliot, élèves du lycée de Strasbourg; Romain Delaune, répétiteur au lycée de Douai; Marmier, élève de l'École Sainte-Geneviève; Recoq, élève du lycée de Montpellier; Boutmy, élève du lycée Saint-Louis. MM. Cornu et Lacauchie, de Sainte-Barbe, ont résolu et généralisé les questions 706 et 707.