NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

De la projection gauche

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 385-393

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__385_0>

DE LA PROJECTION GAUCHE;

PAR M. ABEL TRANSON.

I. Je suppose que pour projeter les différents points d'une figure on emploie des lignes droites assujetties à rencontrer deux droites fixes. On aura ce qu'il me paraît assez naturel d'appeler une *projection gauche*. A la vérité, ce nom conviendrait encore si les deux directrices, ou seulement l'une d'elles, étaient des lignes courbes; mais le système où les deux directrices sont rectilignes, étant le seul dans lequel à un point projeté correspond un point unique du tableau, semble à cause de cela mériter une considération particulière. On remarquera d'ailleurs que la projection gauche donne lieu à la projection conique quand les directrices se rencontrent, et à la projection cylindrique quand elles sont parallèles.

J'appellerai *tableau* le plan sur lequel se fait la projection, et *plan primitif* celui de la figure que l'on projette. Je désignerai par A et B les pieds des directrices sur le plan primitif; par A' et B' leurs pieds sur le tableau, et par L l'intersection des deux plans (*).

L est rencontrée par la ligne AB en un point l, et par A'B' en un point l'. On verra que ces deux points jouent un grand rôle dans le système.

II. Une droite du plan primitif se projette en général selon une conique, et il est aisé de voir que cette conique passe par les trois points A', B' et l. Un quatrième point est

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

à la rencontre de la droite donnée avec L; un cinquième sera le point qui lui correspond sur la *ligne de fuite*.

J'entends par *ligne de fuite* la projection sur le tableau de tous les points à l'infini du plan primitif. C'est manifestement l'intersection du tableau par le paraboloïde hyperbolique ayant pour directrices rectilignes celles mêmes du système, et pour plan directeur le plan primitif.

Pour avoir le point de la ligne de fuite qui répond à une droite donnée du plan primitif, on mènera à celle-ci par A et B deux parallèles qui rencontreront L aux points α et β; les lignes du tableau $A'\alpha$ et $B'\beta$ se rencontreront en γ qui sera le point demandé, le cinquième point de la conique suivant laquelle se projette la droite donnée.

III. Supposons qu'on ait construit les points de fuite $\gamma, \gamma',\ldots,$ relatifs à toutes les directions de lignes situées dans le plan primitif. Alors les couples de points α, β; α', β'; etc., qui répondent aux couples de parallèles $A\alpha$, $B\beta$; $A\alpha'$, $B\beta'$; etc., forment sur L deux divisions homographiques dont l est un des points doubles. Le second étant à l'infini, il suit de là que les points $\gamma, \gamma',\ldots,$ qui sont sur le tableau à la rencontre des couples de droites $A'\alpha$, $B'\beta$; $A'\alpha'$, $B'\beta'$;..., sont sur une hyperbole ou sur une parabole, ainsi que cela résultait *à priori* de la propriété de la ligne de fuite d'être l'intersection d'un paraboloïde hyperbolique par le plan du tableau. Mais, de plus, on remarquera que cette hyperbole ou parabole passe par A', B' et l, aussi bien que la projection gauche de toute droite du plan primitif. Donc il est permis de considérer la ligne de fuite comme la projection d'une certaine droite de ce plan.

Il suit de là que le principe introduit dans la science par la considération de la projection centrale, savoir que :

les points à l'infini d'un plan sont sur une droite; cette sorte d'aphorisme qui, pris à la lettre, serait inexact vû que la situation relative d'une suite de points à l'infini est par elle-même indéterminée, mais qui exprime commodément un fait géométrique; cet aphorisme ou ce principe demeure applicable à la projection gauche, ce qu'à la vérité et dans quelque mesure on aurait pu prévoir, puisque la projection gauche renferme comme cas particulier la projection centrale.

IV. Si la droite du plan primitif passe par le pied de l'une des directrices, comme serait la droite Aα qui rencontre L au point α, sa projection gauche se composerait de deux droites, savoir A'α, et B'l, celle-ci commune évidemment à toutes les droites primitives qui passent par A.

De même, la droite primitive Bβ se transforme en un système de second ordre composé de la droite B'β qui varie avec β, et de A'l qui en est indépendante.

Quant à la projection de toute droite primitive passant par le point l, ce serait une conique tangente à la droite L en ce même point l.

Enfin, par réciprocité, toute conique du tableau, si elle passe par les points A', B' et l, répond à une droite du plan primitif qu'il sera facile de déterminer en ayant égard à ce qui précède. Car cette conique rencontrera L en un second point qui, considéré comme étant sur le plan primitif, appartient à la droite en question, et de plus elle, cette conique, rencontre la ligne de fuite en un quatrième point qui, étant la projection du point de cette même droite situé à l'infini, en fera connaître la direction.

V. Si on considère sur le plan primitif un faisceau de droites issues d'un point D, les coniques correspondantes formeront sur le tableau un faisceau de base $(A', B'l, D')$ (*), en appelant D' la projection gauche du point D. D'ailleurs ce faisceau de coniques sera homographique à celui des droites primitives. En effet, chaque droite primitive $D\delta$ détermine une et une seule conique du faisceau, et par suite elle détermine aussi la tangente de cette conique en un quelconque des quatre pivots de la base, par exemple en D'. De même la tangente en D' à l'une des coniques du faisceau détermine cette conique, et par suite détermine la droite primitive correspondante, soit la droite $D\delta$. Or, cette détermination réciproque entraîne, comme on sait, l'homographie des deux faisceaux.

VI. Par les principes de la projection gauche on pourra évidemment transformer tout théorème n'impliquant que des lignes droites en un autre dans l'énoncé duquel les droites seront remplacées par des coniques passant par trois points fixes. Il suffira de citer l'exemple suivant :

Théorème. — *Si deux faisceaux homographiques de coniques ayant pour bases respectives* (α, A, B, C) *et* (β, A, B, C) *sont tellement placés, que la conique des cinq points* α, β, A, B, C, *étant considérée comme appartenant au premier faisceau, soit elle-même son homologue dans le second, les autres coniques du premier faisceau rencontreront respectivement leurs homologues en des points situés sur une nouvelle conique passant elle-même par les trois points* A, B, C.

La vérité de ce théorème résulte sans autre examen de sa corrélation avec la propriété connue de deux faisceaux

(*) On sait que M. Chasles appelle *faisceau* l'ensemble des coniques qui passent par quatre points, et *base* du faisceau l'ensemble de ces quatre points.

de droites qu'on suppose homographiques et tellement placés, que la ligne qui joint leurs centres, considérée comme rayon de l'un d'eux, soit en même temps son homologue dans l'autre.

VII. A l'aide des mêmes principes on pourra, de toutes les propriétés appartenant à des courbes d'un ordre donné, faire sortir des propriétés relatives à des courbes d'ordre supérieur.

Ainsi les courbes du second ordre se transformeront en courbes du troisième ou du quatrième ordre; car si on fait premièrement la projection gauche d'une telle courbe en plaçant hors de son périmètre les pieds A et B des deux directrices, une droite quelconque du tableau correspondra sur le plan primitif à une conique passant par les points A, B et l', laquelle coupe nécessairement la conique primitive en quatre points qui sont ou réels, ou imaginaires par couples; et ces points eux-mêmes répondent aux rencontres sur le tableau de cette droite et de la projection gauche de la conique primitive; cette projection est donc une courbe du quatrième ordre.

En second lieu, si le pied de l'une des directrices est placé sur le périmètre de la conique primitive, la projection sera, comme il est aisé de le voir, une courbe du troisième ordre, ou mieux le système d'une telle courbe et d'une ligne droite.

Si les deux pieds des directrices sont sur le périmètre de la conique primitive, sa projection sera une nouvelle conique ou plutôt un système du quatrième ordre formé de cette conique et des deux droites $A'l$, $B'l$.

Enfin, les deux pieds A et B des directrices étant sur le périmètre de la conique, s'il arrive que le point l', qui est à la rencontre de $A'B'$ avec l'intersection du plan primitif et du tableau, soit aussi sur ce même périmètre, la projection de la conique proposée sera manifestement une ligne droite.

Généralement la projection gauche d'une courbe de l'ordre n sera de l'ordre $2n$, $2n - 1$, $2n - 2$ ou enfin $2n - 3$, selon que son périmètre ne rencontrera aucun des trois points A, B, l', ou en rencontrera un ou deux, ou enfin les rencontrera tous les trois.

VIII. Comme application de ces principes, faisons la projection gauche de la figure dans laquelle une conique est engendrée par la rencontre de deux faisceaux rectilignes homographiques.

On aura sur le tableau la génération d'une courbe du quatrième ordre par les rencontres des coniques homologues appartenant à deux faisceaux *quadriques* homographiques, ayant à leurs bases trois points communs.

Cela suppose que les points A, B et l' du plan primitif soient hors du périmètre de la conique engendrée par les deux faisceaux rectilignes.

De même on aura pour les courbes du troisième ordre une génération par la rencontre des éléments homologues de deux faisceaux homographiques dont l'un rectiligne et l'autre quadrique, si le centre du faisceau rectiligne est l'un des quatre pivots de la base du faisceau quadrique. En effet, ces deux faisceaux peuvent être considérés comme la projection gauche de la génération d'une courbe du second ordre par les rencontres des éléments homologues de deux faisceaux rectilignes homographiques, pourvu qu'on place le pied de l'une des directrices au centre de l'un de ces faisceaux.

IX. Comme seconde application, on peut montrer que la propriété des courbes du troisième ordre, d'avoir trois points d'inflexion en ligne droite, se lie à une propriété des courbes du second ordre.

On sait, en effet, qu'en un point A quelconque d'une conique passent trois cercles qui sont osculateurs de la conique en trois autres points B, C, D et de plus que les quatre points A, B, C, D sont eux-mêmes sur un quatrième cercle. (Théorème de feu Joachimsthal.)

Par la projection centrale et par le principe de continuité de M. Poncelet, ce théorème subit une première transformation et devient cette propriété générale des sections coniques :

Par un point A *du périmètre d'une conique* S *et par deux points a et b de son plan on peut faire passer trois coniques ayant avec la première un contact du second ordre en des points distincts* B, C, D; *de plus, les six points* A, B, C, D, *a*, *b* *sont sur une même conique.*

Faisons une projection gauche de la figure qui convient à ce théorème, en ayant soin que les points A, *a*, *b* coincident avec les pieds des deux directrices et avec le point l'.

La conique S devient sur le tableau une courbe du troisième ordre; les trois coniques osculatrices s'y transforment en des lignes droites puisqu'elles passent par les pieds des directrices et par le point l', et chacune de ces droites touche la cubique selon un contact du second ordre, c'est-à-dire en un point d'inflexion. Et ces trois points d'inflexion sont en ligne droite, puisque la conique des six points est elle-même transformée en une ligne droite.

X. Dans un Mémoire publié en 1831 dans le *Journal de Crelle*, sous le titre de *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de Géométrie*, M. Magnus (de Berlin) se propose de trouver pour les figures planes des formules de transformation telles, qu'à un point de la figure transformée corresponde un point unique de la transformante, et réciproquement. Pour cela, appelant x et y les coordonnées rectilignes d'un point quelconque de l'une des deux figures; appelant u et t celles du point correspondant de l'autre, il remarque qu'il doit y avoir entre ces quantités deux équations qui soient seulement du premier degré par rapport à x et y, aussi bien que par rapport à u et t. Représentant donc par A, A', A'', B, B' et B'' six fonctions du premier degré en x et y, de sorte, par exemple, que l'on ait $A = ax + by + c$, les deux équations en question sont nécessairement de la forme

$$Au + A't + A'' = 0, \quad Bu + B't + B'' = 0,$$

d'où on déduit

$$u = \frac{A'B'' - A''B'}{AB' - A'B}, \quad t = \frac{A''B - AB''}{AB' - A'B}.$$

Maintenant, supposons qu'on ait un lieu géométrique exprimé en u et t; les substitutions de ces valeurs donneront l'équation en x et y de ce lieu transformé.

Il est aisé de voir qu'une ligne droite devient par cette transformation une section conique, et plus généralement qu'une courbe du degré n devient une courbe du degré $2n$, à moins que l'ordre ne s'abaisse par quelques relations particulières entre les constantes des formules et les paramètres de la courbe primitive.

M. Magnus fait voir, par rapport à la transformation des lignes droites, que les coniques correspondantes passent toutes par trois points fixes qu'il appelle *les trois points fondamentaux* du plan transformé, etc.

On reconnaît à ces résultats les propriétés de la projection gauche. C'est que cette sorte de projection réalise géométriquement la transformation dont M. Magnus a donné les formules analytiques, parce qu'elle offre la circonstance requise par le géomètre de Berlin, savoir, qu'à chaque point de la figure transformée corresponde un point unique de la figure transformante, et réciproquement.

A la vérité, les formules de M. Magnus offrent plus de généralité en ce que deux des trois points fondamentaux peuvent y être des points imaginaires conjugués, au lieu que les trois points A, B, l' de la projection gauche sont nécessairement réels. Mais les résultats obtenus par nos principes pourront toujours, à l'aide du principe de continuité de M. le général Poncelet, être portés au même degré de généralité que ceux de M. Magnus.