Bulletin

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 373-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__373_1>

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

XVIII.

CHASLES. — *Traité des Sections coniques*, faisant suite au *Traité de Géométrie supérieure*. Première partie. In-8° de XIV-368 pages et 5 planches; 1865. Paris, Gauthier-Villars. — Prix : 9 francs.

M. Chasles vient de publier, sous le titre de *Traité des Sections coniques*, la première partie du grand ouvrage qui doit présenter, dans un enchaînement systématique, les diverses applications des principes et des procédés de démonstration exposés dans le *Traité de Géométrie supérieure*, à toutes les parties de la Géométrie pure, soit sur le plan, soit dans l'espace.

Le *Traité des Sections coniques* se composera de deux volumes; le premier paraît seul aujourd'hui (*). Les matières qu'il renferme

---

(*) Cet ouvrage, sorti des presses de M. Gauthier-Villars, successeur de ont presque toutes, et plusieurs fois depuis 1846 (date de la création de la chaire de *Géométrie supérieure*), fait le sujet du cours professé par M. Chasles à la Sorbonne. Les personnes à qui il a été donné de suivre ces savantes et instructives leçons se retrouveront donc sur un terrain en partie connu par elles.

Le programme tracé dans l'*Introduction au Cours de Géométrie supérieure* est vaste. L'auteur y fait pressentir qu'il donnera successivement au public des Traités relatifs aux coniques planes, aux coniques sphériques, aux surfaces du second ordre, aux courbes planes du troisième et du quatrième degré, aux propriétés générales des courbes et des surfaces de tous les ordres, aux courbes à double courbure et aux surfaces réglées du troisième et du quatrième degré, etc. Les personnes qui s'intéressent à la Géométrie attendaient donc l'apparition du premier anneau de cette longue chaîne, avec une impatience d'autant plus légitime, qu'on savait parfaitement qu'à part quelques détails peut-être, l'auteur possédait en manuscrits les matériaux nécessaires à la réalisation de ses promesses. En effet, les leçons de la Sorbone venaient, chaque année, soulever quelque coin nouveau du voile aux auditeurs, au moins dans la mesure où leurs études preparatoires, le plus souvent incomplètes dans cet ordre d'idées, leur permettaient de suivre avec quelque profit les développements donnés par le professeur.

M. Chasles, sollicité par ce désir fréquemment exprimé, comprenait sans doute qu'il mettait quelque retard à y répondre. D'autres ouvrages ou de simples Mémoires, calqués sur ses méthodes, ou inspirés par ses écrits, faisaient d'ailleurs dans son domaine des incursions qui pouvaient ôter quelque chose au plaisir de la surprise et de la nouveauté. Mais, d'une part, des fonctions publiques très-multipliees devaient abréger singulièrement les moments que l'auteur était en mesure de consacrer au travail assidu et souvent ingrat d'une redaction definitive, tandis que son esprit inventif, l'entraînant sans cesse vers de nou-

---

M. Mallet-Bachelier, est remarquable par la purete et la correction du texte, ainsi que par la beaute des figures gravees.

veaux sujets, le détournait du but tracé, pour lui faire goûter le charme des découvertes. D'autre part, il voulait écrire pour la postérité, et ne graver sur l'airain qu'un texte longtemps médité et irréprochable. Les savants, comme les écrivains, qui ont en main un burin de cette trempe, sont en général peu impatients de produire leurs œuvres. Ils savent bien que, malgré leurs retards calculés, la priorité leur est rendue, partout où il est juste qu'elle le soit, et qu'ils n'ont pas besoin, pour être reconnus, de s'écrier : *Me! me! adsum qui feci!*

Le volume dont nous voudrions donner ici un rapide aperçu se divise en dix-neuf Chapitres, dont voici le sujet.

Le Chapitre I expose deux propriétés fondamentales qui se prêtent, au même titre et avec la même fécondité, aux deux genres de propositions et de déductions qui forment une théorie complète des sections coniques, savoir : aux propriétés relatives aux points, et aux propriétés relatives aux droites et aux tangentes.

Ces deux propriétés fondamentales dérivent elles-mêmes, comme conséquence immédiate, d'un théorème unique, qui sert de base à tout l'ouvrage, et qui est ainsi conçu :

Les droites menées de quatre points a, b, c, d d'une conique, à un cinquième point quelconque, ont un rapport anharmonique égal à celui des quatre points dans lesquels les tangentes en a, b, c, d rencontrent une cinquième tangente quelconque.

Le Chapitre II fait connaître plusieurs théorèmes généraux et très-importants, qui se déduisent immédiatement des deux propriétés fondamentales. Ce sont les théorèmes de Pappus, de Desargues, de Pascal, de Carnot, et leurs corrélatifs par voie de dualité, parmi lesquels se trouve celui de Brianchon. Ce sont aussi les équations générales des sections coniques, exprimées en fonction des distances des points de la courbe à trois droites fixes ou des tangentes de la courbe à trois points fixes; c'est enfin l'équation de Descartes, bien connue par l'usage exclusif qu'on en fait dans les ouvrages désignés habituellement sous le nom de *Traités de Géométrie analytique*.

Les théorèmes dont il vient d'être question donnent lieu à divers corollaires et conséquences qui font le sujet du Chapître III. Nous citerons une solution élégante du problème fameux de la trisection de l'angle, plusieurs propriétés métriques relatives à l'hyperbole et à la parabole, la construction des coniques déterminées par cinq points ou cinq tangentes, et enfin celle du cercle osculateur en un point d'une conique, dont on connaît la tangente en ce point et trois autres points.

Le Chapitre IV est consacré à une extension des théorèmes généraux du Chapitre II. On y trouve la description organique des coniques de Newton, les théorèmes de Mac-Laurin et de Braikenridge, d'autres propositions encore plus générales qui en découlent, et dont quelques-unes sont dues, soit à ces deux géomètres, soit à M. Poncelet.

L'importante théorie des pôles et polaires, celle des points et des droites conjugués, les propriétés des quadrilatères inscrits ou circonscrits à une conique, celles relatives aux cordes d'une conique passant par un même point ou aux angles circonscrits ayant leurs sommets sur une même droite, font le sujet du Chapitre V. On y trouve d'élégants théorèmes dus à M. O. Hesse, et une explication très-claire de ce qu'il faut entendre par un *quadrilatère imaginaire* inscrit ou circonscrit à une conique. Ces quadrilatères imaginaires jouent un rôle important dans plusieurs questions, et contribuent surtout à simplifier les recherches et les démonstrations et à généraliser les énoncés.

Le Chapitre V se termine par la solution de divers problèmes relatifs à la construction de coniques déterminées par des conditions données, dans lesquelles plusieurs, par exemple quatre points ou quatre tangentes, sont imaginaires.

Le Chapitre VI traite des diamètres et du centre des coniques et de leurs diamètres conjugués. L'auteur y donne un grand nombre de relations métriques, dont plusieurs ne se rencontrent pas habituellement dans les Traités de Géométrie analytique.

Le Chapitre VII apprend à mener, par un point, des normales à une conique, ou des obliques sous un angle donné. La solution est amenée par la démonstration préalable de plusieurs théorèmes intéressants, qui sont la conséquence de l'égalité du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite et de celui des polaires de ces points.

Le Chapitre VIII a pour objet la théorie des divisions homographiques sur une conique. M. Chasles appelle ainsi deux séries de points pris sur la courbe, tels, que les droites menées de ces points à un autre point de la conique forment deux faisceaux homographiques. La considération de ces divisions est utile dans plusieurs questions, notamment dans la théorie des coniques qui ont un double contact. Elle fournit aussi une solution intuitive des deux problèmes suivants, résolus pour la première fois par M. Poncelet:

1° *Inscrire dans une conique un polygone dont tous les côtés passent par autant de points donnés;*

2° *Circonscrire à une conique un polygone dont les sommets soient situés sur autant de droites données.*

Le Chapitre IX expose la théorie des courbes polaires réciproques, et celle des coniques homographiques et homologiques. On y trouve de nombreuses relations de segments, utiles dans les applications. C'est par la considération des coniques homologiques que l'auteur introduit, de la manière la plus simple et la plus naturelle, dans le Chapitre X, la notion des *foyers*, et parvient à demontrer, sans calculs, toutes les proprietés descriptives ou métriques de ces points. Le problème dont la solution sert de point de départ dans cette branche de la théorie des coniques est le suivant :

Une conique étant donnée, on demande de déterminer le centre d'homologie, de manière que la conique homologique soit un cercle.

Il y a deux solutions, et les deux centres d'homologie ainsi trouvés sont les foyers.

Quelques géomètres, et à leur tête M. Plücker, à qui cette conception est due (1833), définissent les foyers en disant que *ces points sont les deux sommets réels du quadrilatère imaginaire circonscrit à la courbe, et dont les points de concours des côtés* *opposés sont les deux points imaginaires situés à l'infini sur un cercle.* Cette notion, qui sous un énoncé peu différent a l'avantage de s'appliquer aux courbes d'un ordre quelconque, ne pouvait servir de définition dans une théorie des coniques bien ordonnée. Mais il était utile de ne pas la passer sous silence, car elle est féconde et procure des démonstrations intuitives de certaines questions, particulièrement dans la théorie des coniques homofocales. L'auteur fait connaître les considérations par lesquelles elle se trouve le plus naturellement amenée.

Le Chapitre XI résout diverses questions ayant pour objet de faire la perspective ou la figure homologique d'une conique lorsqu'un ou deux points donnés deviennent les foyers de la nouvelle courbe.

Les théorèmes de Steiner, de Lamé, et divers autres relatifs aux propriétés d'involution de plusieurs coniques circonscrites ou inscrites à un quadrilatère, font l'objet du Chapitre XII. On y voit ce qu'il faut entendre par le rapport anharmonique de quatre coniques circonscrites à un même quadrilatère, notion fort utile dans la théorie des courbes du troisième et du quatrième ordre.

Le Chapitre XIII traite des cordes communes à deux coniques ou *axes de symptose* et fait connaître leur construction dans tous les cas. Ce sujet, qui jusqu'ici avait laissé beaucoup à désirer, au point de vue de la simplicité et même de la rigueur des démonstrations, est traité de main de maître. On en peut dire autant du Chapitre XIV, où il est question des points de concours des tangentes communes à deux coniques, ou *points ombilicaux*.

Le Chapitre XV fait connaître les relations qui existent entre les cordes communes et les ombilics de deux coniques. On y trouve une démonstration rigoureuse de cette belle proposition due à M. Poncelet, savoir :

Deux coniques quelconques sont deux figures homologiques, dans lesquelles l'axe d'homologie est une corde commune et le centre d'homologie est un ombilic correspondant à cette corde.

Le même Chapitre traite des coniques homothétiques, et fait connaître leur construction dans divers cas donnés. Il se termine par la solution générale de ce problème difficile, que Desargues paraît avoir résolu le premier, mais par d'autres méthodes :

Étant données deux coniques, en faire la perspective, de manière qu'elles deviennent deux coniques homofocales, ou deux cercles, ou deux hyperboles équilatères ayant un foyer commun, ou deux paraboles ayant un foyer commun, etc.

Le Chapitre XVI renferme les propriétés de trois et de quatre coniques passant par quatre mêmes points ou tangentes à quatre mêmes droites, et le Chapitre XVII des théorèmes généraux relatifs aux points d'intersection de trois coniques quelconques et aux tangentes communes à ces courbes prises deux à deux. Enfin le Chapitre XVIII contient aussi des propriétés très-variées, dont la plupart n'étaient pas connues, relatives à des coniques circonscrites ou inscrites à un même quadrilatère.

Ces trois Chapitres sont peu susceptibles d'être analysés, à cause de la diversité des propositions. Ils sont fort importants et auront de nombreuses applications dans diverses théories, et notamment dans celle des coniques homofocales. Parmi les nombreux théorèmes qu'ils contiennent, nous citerons, par exemple, les deux suivants :

1° *Quand deux coniques sont inscrites dans un quadrilatère, les huit points de contact sont sur une même conique, et les tangentes menées aux deux coniques données, par chaque point de celle-ci, forment un faisceau harmonique ;*

2° *Quand deux coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, leurs tangentes aux sommets des quadrilatères sont huit tangentes d'une même conique, et chacune des tangentes de cette conique est divisée harmoniquement par les deux coniques données.*

Le Chapitre XIX, qui termine le volume, traite des coniques ayant un double contact. La théorie des divisions homographiques sur une conique, exposée dans le Chapitre VIII, trouve ici d'importantes applications, et fournit des démonstrations intuitives de théorèmes qui semblent difficiles. Nous citerons au hasard le suivant :

Si un angle de grandeur donnée tourne autour de son sommet situé sur une conique, les cordes que cet angle intercepte dans la courbe enveloppent une conique qui a un double contact avec la proposée; les deux points de contact (imaginaires) sont toujours les mêmes, quelle que soit la grandeur de l'angle.

Le § IV de ce Chapitre contient une théorie approfondie des coniques inscrites à deux coniques. L'auteur y donne la solution de plusieurs problèmes relatifs à la construction de coniques devant avoir un double contact avec une ou deux coniques données. Enfin, le § V fait connaître les propriétés relatives à trois coniques inscrites dans une même conique. Ces propriétés sont intéressantes et ont une analogie frappante, que l'auteur fait ressortir, avec celles des cercles, notamment en ce qui concerne la construction d'une conique tangente à trois autres et celle d'un cercle tangent à trois cercles. C'est qu'en effet on peut transformer l'un des systèmes dans l'autre.

Telle est l'analyse succincte des matières extrêmement variées que contient la première partie du *Traité des Sections coniques*. Dans la deuxième, dont nous souhaitons la prompte publication, il reste à traiter des coniques homofocales, des faisceaux et réseaux de coniques, des propriétés où apparaissent des courbes d'ordre supérieur, de celles qui sont relatives aux fonctions elliptiques, etc., et à exposer cette vaste et belle théorie des systèmes de coniques assujetties à quatre mêmes conditions quelconques, qui est la plus récente et certainement une des plus remarquables créations de M. Chasles.

Ainsi complété, le *Traité des Sections coniques* prendra, dans la Géométrie moderne, le rang qu'occupait, dans l'antiquité, celui d'Apollonius, avec toute la supériorité que comportent les perfectionnements apportés dans la science par les efforts des siècles écoulés. Espérons qu'on lui donnera aussi le même rang qu'avait jadis dans l'enseignement de la jeunesse l'ouvrage du célèbre géomètre grec.

Écrit à la manière des anciens, comme l'était déjà le *Traité de Géométrie supérieure*, le nouvel ouvrage de M. Chasles l'emporte, selon nous, sur ce dernier par l'ordre, la clarté et l'enchaînement des matières, par la sobriété des détails, par la concision des raisonnements, enfin par la pureté du style. Cette supériorité peut d'ailleurs tenir à la nature même du sujet, qui présentait plus d'unité.

Dans le *Traité de Géométrie supérieure*, l'auteur avait à exposer un système encore très-peu connu, à faire adopter des dénominations nouvelles; à écarter, comme indirects et impropres à une exposition didactique, des procédés de démonstration et de transformation justement accrédités, à prouver enfin la fécondité des méthodes nouvelles, l'uniformité de leur emploi, la portée de leurs applications. Il fallait, sinon combattre, du moins un peu plaider, et on se trouvait ainsi nécessairement entraîné à quelques digressions, instructives toujours, mais parfois un peu contraires à la pureté de la forme.

Ici il en est autrement. Les méthodes de l'auteur sont connues, ses appellations sont admises dans la science. Il n'a plus à en faire la présentation, ni en quelque sorte à excuser leur audace. Comme Euclide, il entre en matière par qûelques lignes de définitions, et présente dès la première page le théorème qui sert de base à tout l'édifice. Il s'avance alors à travers son sujet, avec le calme et la majesté de la vérité pure, avec l'assurance que donne la force, mais en même temps avec l'élégance qui la dissimule et la rend attrayante, avec la sobriété et la discrétion que le goût inspire, ne cueillant dans chaque matière que la fleur, et justifiant ainsi à tous égards cet heureux parallèle qu'un de nos plus illustres Académiciens (*) faisait un jour en disant de l'auteur qu'il est « le La Fontaine des Mathématiques ».

E. de Jonquières.

Saïgon (Cochinchine), 14 mai 1865.

(*) M. J. Liouville.

XIX.

Breton (de Champ), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — *Traité du lever des plans et de l'arpentage*, précédé d'une Introduction qui renferme des notions sur l'emploi pratique des logarithmes, la Trigonométrie, l'Algèbre et l'Optique. In-8° de XXXII-596 pages et 9 planches. Paris, 1865; Gauthier-Villars. — Prix : 7 fr. 50 c.

La *Table des matières* placée en tête de l'ouvrage a une étendue de 22 pages. L'*Introduction*, de 180 pages, renferme des notions sur l'emploi *pratique* des *logarithmes* considérés comme un outil : c'est à peu près ainsi que les ouvriers intelligents parviennent à se servir très-utilement de la *règle à calcul*, qui n'est autre chose qu'une table de logarithmes; des notions sur la *Trigonométrie*, qui est indispensable pour former la triangulation d'un terrain de quelque étendue et éviter les erreurs inhérentes aux constructions graphiques; des notions sur l'*Algèbre*, pour aider surtout à comprendre les formules trigonométriques; enfin, une théorie très-complète des instruments d'optique dont on fait usage dans les opérations sur le terrain. L'auteur emploie les formules et les principes donnés en 1840 par l'illustre Gauss dans ses *Recherches dioptriques*, et jusqu'à présent fort peu répandus en France, malgré les avantages considérables qu'ils présentent. Il fait connaître le moyen pratique trouvé par notre célèbre physicien, M. Léon Foucault, pour éprouver le degré de perfection d'un appareil optique sans le démonter.

Le Livre I est consacre aux opérations élémentaires, telles que le tracé des lignes droites sur le terrain, soit au moyen de simples jalons, soit avec le secours d'un instrument spécial comme pour les grands alignements des chemins de fer; la mesure des distances soit avec la *chaîne*, soit sans *chaînage*, au moyen de l'instrument appelé *stadia;* la mesure des *angles* et leur construction sur le terrain. Ce Livre est terminé par les règles que fournit le calcul des probabilités pour combiner entre eux de la manière la plus avantageuse les résultats de plusieurs mesures lorsqu'ils présentent des différences qu'on puisse attribuer à l'incertitude inhérente au procédé que l'on a employé.

Le Livre II expose les divers procédés usités pour les *levers de plans*. Ils y sont décrits avec tous les détails nécessaires pour mettre le lecteur à même de surmonter les diverses difficultés que présentent toujours les opérations sur le terrain. Tout ce qui concerne la connaissance des instruments est traité avec un soin particulier. Le dessin des plans est l'objet de quelques indications qui ne seront pas inutiles.

L'auteur a consacré le Livre III à ce qu'il appelle l'*arpentage*. Il comprend sous ce nom d'abord toutes les petites opérations géométriques qu'il faut savoir exécuter sur le terrain, et dont il est nécessaire de posséder des solutions assez diversifiées pour n'être jamais embarrassé; ensuite tout ce qui concerne la mesure des contenances, les partages de terrains dans des conditions données, la conversion des anciennes mesures en mesures nouvelles, et réciproquement, etc.

Le Livre IV et dernier a pour objet les opérations dites *de précision*. On y trouve un exemple de triangulation traité très-complétement et par une méthode telle, qu'on peut se rendre compte du degré de précision qu'on peut espérer de mesures obtenues dans des conditions assignées. Il y a dans ce Livre des indications que l'on chercherait vainement dans d'autres ouvrages.

XX.

RUBINI (R.), Professeur à Naples. — Elementi... *Éléments de Géométrie analytique*. Première partie : Géométrie plane. In-8° de VI-472 pages. Naples, 1865.

Dans sa préface l'auteur s'excuse, pour ainsi dire, d'avoir donné dans son Traité une si grande place aux coordonnées cartésiennes, ainsi qu'à la construction des formules et des equations. Cela, dit-il, peut paraître étrange (*strano*) depuis la publication de l'œuvre très-précieuse de M. Salmon, où, pour la première fois, on a introduit dans les éléments de Géométrie analytique les systèmes modernes de coordonnées; mais M. Rubini se justifie par des raisons qui ne nous semblent point mauvaises. « Les coordonnées cartésiennes sont les seules qui se prêtent exclusivement au développement des questions de Mécanique, par la raison naturelle que les mouvements ne peuvent avoir lieu que suivant certaines directions et autour de certains axes ou de certains points. D'un autre côté, les formules élémentaires, les métriques principalement, n'ont pas, en général, dans les nouveaux systèmes, la même simplicité que leurs similaires dans le système cartésien. Ce dernier donne aussi les formules les plus simples dans le calcul infinitésimal, où jusqu'à présent les nouveaux systèmes n'ont pas montré toute leur puissance.... Un des principaux avantages qu'offre une méthode de coordonnées, c'est de conduire directement à la solution d'un problème géométrique, sans recourir aux propriétés de lieux géométriques déjà étudiés. La raison en est qu'une telle méthode, et principalement avec les coordonnées cartésiennes, offre toutes les formules projectives ou métriques qui servent à exprimer analytiquement les conditions géométriques du problème. Pourquoi donc n'en pas tirer profit? » Tel est le plaidoyer de M. Rubini. Cependant le savant géomètre ne méconnaît pas l'importance des nouveaux systèmes, et on en trouve dans son livre une excellente exposition. Il ne faut en effet mépriser aucune méthode. Le bon ouvrier se sert de tous les outils; mais il ne cache pas sa préférence pour les plus simples, pour ceux qu'il manie avec le moins d'effort.