Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 365-373
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__365_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 691

(voir 2e série, t. III, p. 61);

PAR MM. A. GRASSAT ET DESQ,
Élèves du lycée de Lyon.

Trouver l'équation de la surface qui est le lieu des courbes de contact des cônes ayant un point fixe pour sommet, et circonscrits aux ellipsoïdes d'un système homofocal donné. (STREBOR.)

L'équation d'un des ellipsoïdes étant

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

la courbe de contact du cône ayant le point (α, β, γ) pour sommet est représentée par cette équation et par

$$\frac{\alpha x}{a^2+\lambda}+\frac{\beta y}{b^2+\lambda}+\frac{\gamma z}{c^2+\lambda}=1.$$

On obtiendra le lieu demandé en éliminant λ entre ces deux équations, qu'on peut remplacer par les suivantes :

$$\frac{y(\alpha y-\beta x)}{b^2+\lambda}+\frac{z(\alpha z-\gamma x)}{c^2+\lambda}=\alpha-x,$$

$$\frac{x(\beta x-\alpha y)}{a^2+\lambda}+\frac{z(\beta z-\gamma y)}{c^2+\lambda}=\beta-y,$$

ou

$$\left.\begin{array}{l|l} (x-\alpha)\lambda^2+y(\alpha y-\beta x) & \lambda+c^2y(\alpha y-\beta x)\\ \quad +z(\alpha z-\gamma x) & \quad +b^2z(\alpha z-\gamma x)\\ \quad +(b^2+c^2)(x-\alpha) & \quad +b^2c^2(x-\alpha)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} (y-\beta)\lambda^2 + x(\beta x - \alpha y) & \lambda + c^2x(\beta x - \alpha y) \\ \quad + z(\beta z - \gamma y) & \quad + a^2 z(\beta z - \gamma y) \\ \quad + (a^2 + c^2)(y-\beta) & \quad + a^2c^2(y-\beta) \end{array}\right\} = 0.$$

Or, quand on a deux équations

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$
$$A'\lambda^2 + B'\lambda + C' = 0,$$

le résultat de l'élimination de λ est

$$(AC' - CA')^2 = (AB' - BA')(BC' - CB').$$

Dans le cas actuel,

$$\begin{aligned} AC' - CA' &= c^2x(x-\alpha)(\beta x - \alpha y) + a^2z(x-\alpha)(\beta z - \gamma y) \\ &\quad + a^2c^2(x-\alpha)(y-\beta) - c^2y(y-\beta)(\alpha y - \beta x) \\ &\quad - b^2z(y-\beta)(\alpha z - \gamma x) - b^2c^2(x-\alpha)(y-\beta) \\ &= c^2\big\{(a^2-b^2)(x-\alpha)(y-\beta) + (\beta x - \alpha y) \\ &\qquad \times [x(x-\alpha) + y(y-\beta)]\big\} \\ &\quad + z[a^2(x-\alpha)(\beta z - \gamma y) - b^2(y-\beta)(\alpha z - \gamma x)]. \end{aligned}$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} AB' - BA' &= (a^2-b^2)(x-\alpha)(y-\beta) + (\beta x - \alpha y) \\ &\quad \times [x(x-\alpha) + y(y-\beta)] \\ &\quad + z[(x-\alpha)(\beta z - \gamma y) - (y-\beta)(\alpha z - \gamma x)], \\ BC' - CB' &= c^4\big\{(a^2-b^2)(x-\alpha)(y-\beta) + (\beta x - \alpha y) \\ &\qquad \times [x(x-\alpha) + y(y-\beta)]\big\} \\ &\quad + z(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)(z-\gamma)(\beta x - \alpha y) \\ &\quad + z[(a^2-b^2)z(\beta z - \gamma y)(\alpha z - \gamma x) \\ &\qquad + (b^2-c^2)x(\alpha y - \beta x)(\alpha z - \gamma x) \\ &\qquad + (a^2-c^2)y(\beta x - \alpha y)(\beta z - \gamma y)]. \end{aligned}$$

Donc, en posant

$$(a^2-b^2)(x-\alpha)(y-\beta)+(\beta x-\alpha y)[x(x-\alpha)+(y-\beta)]=\mathrm{P},$$
$$a^2(x-\alpha)(\beta z-\gamma y)-b^2(y-\beta)(\alpha z-\gamma x)=\mathrm{Q},$$
$$(x-\alpha)(\beta z-\gamma y)-(y-\beta)(\alpha z-\gamma x)=\mathrm{Q}',$$
$$(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)(z-\gamma)(\beta x-\alpha y)=\mathrm{R},$$
$$z(a^2-b^2)(\beta z-\gamma y)(\alpha z-\gamma x)+x(b^2-c^2)(\alpha y-\beta x)(\alpha z-\gamma x)$$
$$+y(a^2-c^2)(\beta x-\alpha y)(\beta z-\gamma y)=\mathrm{S},$$

l'équation de la surface peut s'écrire

$$(\mathrm{P}c^2+\mathrm{Q}z)^2=(\mathrm{P}+\mathrm{Q}'z)(\mathrm{P}c^4+\mathrm{R}z+\mathrm{S}z),$$
$$\mathrm{P}^2c^4+2\mathrm{PQ}c^2z+\mathrm{Q}^2z^2=\mathrm{P}^2c^4+\mathrm{P}z(\mathrm{R}+\mathrm{S})$$
$$+\mathrm{Q}'z(\mathrm{P}c^4+\mathrm{R}z+\mathrm{S}z);$$

elle se décompose donc en $z=0$, ce qui donne le plan des xy et

$$2\mathrm{PQ}c^2+\mathrm{Q}^2z=\mathrm{P}(\mathrm{R}+\mathrm{S})+\mathrm{Q}'(\mathrm{P}c^4+\mathrm{R}z+\mathrm{S}z),$$

ce qui représente une surface du sixième degré.

Sa trace sur le plan des xy est représentée par

$$2\mathrm{PQ}c^2=\mathrm{P}(\mathrm{B}+\mathrm{S})+\mathrm{PQ}'c^4,$$

qui se décompose en $\mathrm{P}=0$, c'est-à-dire

$$(a^2-b^2)(x-\alpha)(y-\beta)$$
$$+(\beta x-\alpha y)[x(x-\alpha)+y(y-\beta)]=0,$$

et

$$2\mathrm{Q}c^2=\mathrm{R}+\mathrm{S}+\mathrm{Q}'c^4,$$

c'est-à-dire

$$2c^2\gamma[b^2x(y-\beta)-a^2y(x-\alpha)]$$
$$=-\gamma(\beta x-\alpha y)(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-\gamma x^2(b^2-c^2)(\alpha y-\beta x)$$
$$-\gamma y^2(a^2-c^2)(\beta x-\alpha y)+\gamma c^4(\alpha y-\beta x).$$

La première représente une strophoïde oblique passant par le point P (α, β), par ses projections Q, R sur les axes; les tangentes en P sont perpendiculaires, et l'asymptote est parallèle à OP.

La deuxième passe aussi par le point (α, β), a une asymptote parallèle à OP. Dans le cas où l'ellipsoïde donné est de révolution autour de l'axe des z, $a=b$, cette équation, qui peut s'écrire

$$\begin{gathered}2a^2c^2(\alpha y-\beta x)\\ +(\alpha y-\beta x)\left[a(x^2+y^2)(a^2-c^2)-a^4-c^4-2a^2c^2\right]=0,\end{gathered}$$

se décompose en

$$\alpha y-\beta x=0,$$

c'est-à-dire la droite OP, et

$$x^2+y^2=\frac{a^4+c^4}{a^2-c^2},$$

ce qui représente un cercle ayant l'origine pour centre.

Comme cas particulier, supposons que la surface donnée est une sphère : on aura

$$\begin{aligned}R&=3a^4(z-\gamma)(\beta x-\alpha y),\\ Q&=a^2(z-\gamma)(\beta x-\alpha y),\\ Q'&=(z-\gamma)(\beta x-\alpha y);\end{aligned}$$

S est identiquement nul,

$$P=[x(x-\alpha)+y(y-\beta)](\beta x-\alpha y),$$

et l'équation de la surface devient, en remplaçant Q et R par a^2Q' et $3a^4Q'$,

$$2a^4PQ'+a^4Q'^2z=3a^4PQ'+Q'(a^4P+3a^4Q'z),$$

ce qui se réduit à

$$2a^4PQ'+2a^4Q'^2z=0,$$

ce qui se décompose en

$$Q' = 0,$$

c'est-à-dire les deux plans

$$z - \gamma = 0,$$
$$\beta x - \alpha y = 0,$$

et

$$P + Q'z = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\beta x - \alpha y)[x(x - \alpha) + y(y - \beta) + z(z - \gamma)] = 0;$$

le lieu est donc la sphère

$$x(x - \alpha) + y(y - \beta) + z(z - \gamma) = 0,$$

qui a pour diamètre la droite joignant l'origine au point (α, β, γ).

Note. — M. E. Dubois, élève du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser), a aussi résolu la même question.

Question 720

(voir p. 48);

PAR M. CHEMIN,
Élève de l'École Polytechnique.

Soient x, y, z trois fonctions d'une variable indépendante t, satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

soient $x', y', z', x'', y'', z''$ leurs dérivées premières et secondes par rapport à t.

Les neuf quantités $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ vérifient identiquement l'égalité

$$AC - B^2 - A^3 = D^2,$$

dans laquelle

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= x'^2 + y'^2 + z'^2,\\
\mathrm{B} &= x'x'' + y'y'' + z'z'',\\
\mathrm{C} &= x''^2 + y''^2 + z''^2,\\
\mathrm{D} &= x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x'').
\end{aligned}$$

(Catalan.)

Prenons la dérivée première et la dérivée seconde de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

nous avons

$$(1) \qquad xx' + yy' + zz' = 0,$$

$$(2) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 + xx'' + yy'' + zz'' = 0.$$

La quantité D peut s'écrire sous forme du déterminant

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Formons à la manière ordinaire le carré de ce déterminant :

$$\mathrm{D}^2 = \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & xx' + yy' + zz' & xx'' + yy'' + zz'' \\ xx' + yy' + zz' & x'^2 + y'^2 + z'^2 & x'x'' + y'y'' + z'z'' \\ xx'' + yy'' + zz'' & x'x'' + y'y'' + z'z'' & x''^2 + y''^2 + z''^2 \end{vmatrix}.$$

Cette quantité devient, en faisant les substitutions et remarquant que $xx'' + yy'' + zz'' = -(x'^2 + y'^2 + z'^2)$,

$$\mathrm{D}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{A} \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ -\mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix},$$

ou, en développant,

$$\mathrm{D}^2 = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^3.$$

C. Q. F. D.

Note. — Solution analogue par MM. Graindorge, élève ingénieur des mines à Liége; de Virieu, professeur à Lyon; Wohlgemuth, précepteur à Rugen (Livonie); F. Richard, élève du collége Chaptal; Grassat, du lycée de Lyon; L. Cousin; Gerhardt et Joly, de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard); Maze, du lycée de Toulouse; Léon Bailly, répétiteur au lycée d'Orléans; le P. Autefage, S. J.; Rezzonico, de Morate; M. Lucien Bignon, de Lima (Pérou).

Même question;

PAR M. A. S.,
Élève de l'École Polytechnique.

L'égalité à démontrer est la traduction analytique de quelques propriétés des courbes gauches.

Nous pouvons considérer x, y, z comme les coordonnées d'un point M d'une courbe gauche située sur la sphère $x^2+y^2+z^2=1$. En effet, soit ρ le rayon de cette courbe au point M (x, y, z). Ce rayon est le même que celui de la section de la sphère par le plan osculateur de la courbe au point M. Donc il a pour valeur $\rho^2 = 1 - p^2$, p distance du centre de la sphère au plan osculateur.

Or on sait que

$$p^2 = \frac{[x(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + y(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + z(dx\,d^2y - dy\,d^2x)]^2}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2};$$

et comme

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\,(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2}{ds^6}$$

$$= \frac{AC - B^2}{A^3},$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}{ds^6} = \frac{D^2}{A^3}\cdot\frac{1}{p^2},$$

$$\frac{p^2}{\rho^2} = \frac{1-\rho^2}{\rho^2} = \frac{D^2}{A^3}, \quad \frac{1}{\rho^2} = 1 + \frac{D^2}{A^3},$$

par suite

$$\frac{AC - B^2}{A^3} = 1 + \frac{D^2}{A^3}, \quad AC - B^2 - A^3 = D^2.$$

C. Q. F. D.

Note. — M. H. Violland, de Strasbourg, a démontré le théorème de M. Catalan à l'aide de considérations empruntées à la Mécanique, et où intervient aussi le rayon de courbure.

Question 733;

PAR M^lle^ LÉONIDE LECHAUCEY.

Si les six points P, Q, A, B, C, D *sont sur une même conique, les points d'intersection des droites* PA, QB; PB, QA; PC, QD; PD, QC *sont sur une conique qui passe par les points* P *et* Q. (CAYLEY.)

Soient M, N, R et S les points ainsi obtenus; le problème revient à démontrer que les points de concours des droites MN, RS; PC, QA; PA, QC sont en ligne droite.

Les pôles des droites MN et RS sont sur la droite PQ, donc cette droite est la polaire du point (MN).(RS). Or les polaires des points (PC).(AQ); (PA).(QC) se coupent sur la droite PQ, ce qui démontre que les trois points sont en ligne droite.

Note. — Solution analogue de M. Audoynaud, professeur au lycée de Poitiers.

Même question;

PAR M. GAZÈRES,
Élève du lycée de Bordeaux.

Les deux faisceaux P(ABCD), Q(ABCD) sont homographiques; par suite, les faisceaux P(ABCD), Q(BADC) le sont aussi. Donc les intersections des rayons homologues de ces deux derniers faisceaux PA, QB; PB, QA; PC, QD; PD, QC sont sur une conique passant par les points P et Q.

Note. — Solutions analogues de MM. Grassat, Autefage, Violland, Albert Parel. MM. O. Puel et Viant, du Prytanee militaire, Carriere, du lycee Louis-le-Grand, donnent en outre le theoreme correlatif deduit de la theorie des polaires reciproques M. G. Pontou, du lycee Saint-Louis (classe de M. Vacquant), fait voir que le point N est sur la conique (MQRTP), en s'appuyant sur ce theoreme : *Lorsque trois coniques ont une corde commune, les trois autres cordes communes de ces coniques prises deux à deux passent par un même point.* Solutions analytiques de MM. Carriere, Lerosey, du college Chaptal.