RECOQ

Sur la développée de la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 360-364

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__360_1>

SUR LA DÉVELOPPÉE DE LA PARABOLE;

PAR M. RECOQ,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Montpellier.

Le premier membre de l'équation de la développée d'une parabole

$$27py^2 - 8(x-p)^3$$

représente, à un coefficient linéaire constant $\frac{4}{p}$ *près, le carré de la surface du triangle qui a pour sommets les pieds des trois normales issues du point* (x, y) *considéré comme étant un point quelconque du plan.*

Soient α, β les coordonnées d'un point quelconque du plan, en prenant pour axes la tangente et la normale au sommet de la parabole; si S désigne la surface du triangle des pieds des trois normales issues de ces points, et (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les cordonnées des sommets, on a

$$x'(y''-y''') + x''(y'''-y') + x'''(y'-y'') = \pm 2S,$$

ou, en substituant à x', x'', x''' les valeurs $\frac{y'^2}{2p}$, $\frac{y''^2}{2p}$, $\frac{y'''^2}{2p}$,

$$y'^2(y''-y''') + y''^2(y'''-y') + y'''^2(y'-y'') = \pm 4pS,$$

ou

$$(1) \qquad (y'-y'')(y''-y''')(y'''-y')=\mp 4pS.$$

Les coordonnées y', y'', y''' sont racines de l'équation

$$y^3+2p(p-\alpha)y-2p^2\beta=0;$$

et comme on sait que l'équation au carré des différences de l'équation

$$y^3+Py+Q=0$$

admet pour terme indépendant l'expression $4P^3+27Q^2$, on a

$$(y'-y'')^2(y''-y''')^2(y'''-y')^2=-4[8p^3(p-\alpha)^3+27p^4\beta^2],$$

c'est-à-dire, à cause de la relation (1),

$$27p\beta^2-8(\alpha-p)^3=-\frac{4}{p}S^2.$$

Applications. — I. *Lieu des points tels, que le triangle des pieds des trois normales menées de chacun d'eux à une parabole a une surface constante.*

Il est clair que ce lieu a pour équation

$$y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3-\frac{4S^2}{27p^2}.$$

Cette courbe présente deux inflexions aux points

$$\left\{\begin{aligned} x&=p+\sqrt[3]{\frac{2S^2}{p}}\\ y&=\pm\frac{2S}{3p}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose $S=0$, elle se réduit à l'équation de la développée, ce qui devait être.

II. *Lieu des sommets des triangles* ABC *de surface* *constante circonscrits à une parabole et tels, que les normales aux trois points de contact* A′, B′, C′ *se coupent en un même point.*

On sait que la surface du triangle ABC est la moitié de celle du triangle A′B′C′; la première étant constante, la seconde doit l'être, et par suite le point de rencontre (α, β) des trois normales décrit la courbe dont il vient d'être question et dont l'équation est, en appelant ici S l'aire du triangle ABC,

$$(2)\qquad 27p^2\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 p - 16S^2 = 0.$$

Il suffit donc, pour connaître le lieu des points A, B, C, d'exprimer α, β en fonction des coordonnées de l'un d'eux.

Or, soient (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les coordonnées des trois points de contact, c'est-à-dire des pieds des trois normales issues du point (α, β) : les coordonnées y', y'', y''' sont les racines de l'équation

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0,$$

d'où il suit

$$y' + y'' + y''' = 0,$$
$$y'y''y''' = 2p^2\beta.$$

Or, les coordonnées du point C fourni par l'intersection des tangentes

$$yy' = p(x + x'),\quad yy'' = p(x + x'')$$

étant

$$\left\{\begin{aligned} y &= \frac{y' + y''}{2},\\ x &= \frac{y'y''}{2}, \end{aligned}\right.$$

il vient, à cause des relations précédentes,

$$y = -\frac{y'''}{2},$$

$$x = \frac{p\beta}{y'''},$$

d'où, en multipliant,

$$p\beta = -2xy.$$

On connaît ainsi β en fonction des coordonnées de C.

D'autre part, on peut obtenir la valeur de $p - \alpha$ en observant qu'on a

$$2p(p-\alpha) = y'y'' + y''y''' + y'''y' = y'y'' + y'''(y' + y'')$$
$$= y'y'' - y'''^2,$$

ou $\left(\text{à cause des valeurs } x = \frac{y'y''}{2p},\ \ y = -\frac{y'''}{2}\right)$

$$p - \alpha = \frac{px - 2y^2}{p}.$$

Il reste à porter les valeurs de $p\beta$ et de $p - \alpha$ dans la relation (2) pour avoir l'équation du lieu. C'est une courbe du sixième degré,

$$2(2y^2 - px)^3 - 27p^2x^2y^2 = 4p^2S^2.$$

On peut donner à cette équation une forme qui permet de la discuter aisément; mais il est bon d'examiner préalablement le cas particulier où $S = 0$. Alors deux des trois normales se confondent, et l'on voit que la parabole doit faire partie de la courbe; cela se vérifie d'ailleurs par le calcul; car, si dans l'équation

$$(3) \qquad 2(2y^2 - px)^3 - 27p^2x^2y^2 = 0,$$

on fait $y^2 = 2px$, on a une identité.

Il importe maintenant de faire apparaître le facteur $y^2 - 2px$ dans le premier membre de l'équation (3)

$$2(2y^2 - px)^3 - 27p^2x^2y^2.$$

Par un calcul que nous supprimons, on trouve que l'équation (3) peut s'écrire

$$(4y^2 + px)^2(y^2 - 2px) = 0,$$

c'est-à-dire que :

Le lieu du point d'intersection des deux tangentes à une parabole menées aux deux pieds des normales issues d'un point quelconque de sa développée est une parabole dont l'équation est

$$4y^2 + px = 0.$$

On en conclut que *l'enveloppe de la droite qui joint ces deux pieds est une conique*, car ce lieu est la polaire réciproque de la courbe précédente relativement à la parabole donnée.

Cette conique est une autre parabole

$$y^2 + 16px = 0.$$

En revenant au cas général où la valeur de S est quelconque, on peut mettre l'équation du lieu sous la forme

$$(4y^2 + px)^2(y^2 - 2px) = 4p^2S^2,$$

équation facile à discuter.