NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉOPOLD BRASSEUR

Démonstration d'un théorème de Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 319-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__319_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE STEINER;

PAR M. LÉOPOLD BRASSEUR,
Repetiteur à l'École des Mines de Liége.

Lemmes. — 1° Si les trois droites dont chacune unit deux sommets opposés d'un hexagone plan se coupent en un même point, les côtés de cet hexagone sont tangents à une même courbe du second degré. On déduit de là :

2° Si, dans un angle solide de six arêtes, les trois plans dont chacun passe par deux arêtes opposées se coupent suivant une même droite, les faces latérales de cet angle solide sont tangentes à un même cône du second degré ayant même sommet que l'angle solide, et toutes les droites tracées dans les faces de cet angle solide sont tangentes à ce même cône; en d'autres termes, le cône est inscrit à toutes ces droites.

THÉORÈME. — *Le lieu des sommets de tous les cônes du second degré inscrits à un hexagone gauche* (c'est-à-dire touchés par les côtés de cet hexagone) *est un hyperboloïde à une nappe qui a pour directrices les trois diagonales dont chacune relie deux sommets opposés de l'hexagone gauche proposé.* (STEINER, *Entwickelung der geom. Gestalten;* Berlin, 1832, p. 314.)

Considérons une génératrice quelconque G de l'hyperboloïde que nous venons de définir, c'est-à-dire une droite qui rencontre les trois diagonales mentionnées; prenons sur cette génératrice un point quelconque S pour sommet d'un angle solide dont les six arêtes passent respectivement par les six sommets de l'hexagone. Comme deux arêtes opposées passent par les extrémités d'une même diagonale de l'hexagone, il en résulte que : Si, par la génératrice G et par chaque diagonale on mène un plan, on aura trois plans se coupant suivant la génératrice G, et dont chacun renferme deux arêtes opposées de l'angle solide.

Donc, d'après le lemme 2°, les faces de l'angle solide sont tangentes à un même cône du second degré ayant même sommet que l'angle solide; et les côtés de l'hexagone, lesquels sont situés respectivement dans les six faces de l'angle solide, sont également tangents au même cône; ou, ce qui revient au même, le cône est inscrit à l'hexagone.

Or, le sommet S de ce cône étant un point quelconque de la génératrice G, la propriété se trouve démontrée.