NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MENTION

Sur l'hyperbole équilatère

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 30-39

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__30_1>

SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE;

PAR M. J. MENTION.

L'hyperbole équilatère est encore un bon sujet d'étude, même après les recherches souvent citées de MM. Brianchon et Poncelet, après celles, moins connues, de Bobillier (*Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 349). J'ai trouvé naguère, par exemple, que toutes les courbes de cette espèce, assujetties à toucher les côtés d'un triangle, ont leurs centres sur le *cercle des hauteurs* du triangle, c'est-à-dire le cercle décrit du point de rencontre des hauteurs comme centre, avec un rayon moyen proportionnel entre les segments dans lesquels chaque hauteur est divisée au point de rencontre. Il est clair, maintenant, que le centre d'une hyperbole équilatère, dont trois tangentes et un point de contact sont donnés, se trouverait à l'intersection du cercle des hauteurs avec la droite passant : 1° par le milieu du côté du triangle circonscrit, qui renferme le point de contact assigné; 2° par le milieu de la droite allant de ce point au sommet opposé.

Je lis pourtant dans le tome Ier des *Nouvelles Annales*, p. 426, que « le centre de cette hyperbole est sur une circonférence passant par le point du contact, par le milieu du côté sur lequel est ce point, et par le sommet opposé à ce côté. »

Cela ne fournirait jamais qu'une seule solution, et la fournirait toujours.

La proposition extraite paraît être mise hors de doute par une Note du Rédacteur où il s'engage à *donner prochainement les énoncés renfermés dans les Mémoires cités*. Le Rédacteur n'ayant pas tenu cette promesse, je me suis demandé quel était l'auteur de la proposition en litige, car elle n'appartient ni à Brianchon et Poncelet, ni à Bobillier. Je la jugeais difficile à démontrer, jusqu'au moment où je la jugeai impossible, puisqu'elle est fausse. Je ne parlerais point de cette inadvertance qui s'est glissée dans un travail recommandable, si la page suivante du même travail ne contenait une seconde proposition plus manifestement fausse, portant, en substance, que toutes les hyperboles équilatères passant par un point, et touchant deux droites données, ont leurs centres sur une circonférence. D'ailleurs, il est facile de reconnaître que ces propositions sont incompatibles. La première étant admise, le dernier lieu géométrique serait une courbe du quatrième degré, issue, par rayons vecteurs réciproques, de l'hyperbole à laquelle appartiennent les milieux des sécantes comprises entre les tangentes et passant par le point fixe.

Au surplus, je vais résoudre encore autrement le problème qui a entraîné cette double méprise.

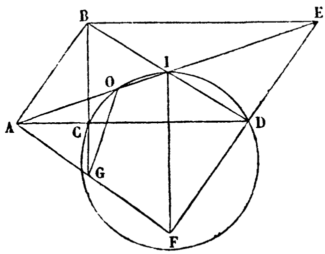
I.

Théorème. — *Le lieu du centre d'une hyperbole équilatère, touchant une droite fixe en un point donné, et passant par un second point, est une circonférence.*

Ire Démonstration. — On sait que le cercle des neuf points d'un triangle inscrit à l'hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe. Si deux des sommets du triangle se confondent, trois des neuf points subsistent, savoir : le point de contact, le milieu du côté restant, et le pied de la perpendiculaire abaissée du troisième sommet sur la tangente.

IIe Démonstration. — La corde BD (*fig.* 1) de l'hy-

Fig. 1.



perbole équilatère est vue du centre O sous un angle supplémentaire de celui des tangentes AB, AD; ce centre sera donc à la fois sur la diagonale AE du parallélogramme ABDE et sur la circonférence qui passerait par les trois points B, D, E. Mais alors $\mathrm{OI}.\mathrm{IE} = \overline{\mathrm{BI}}^2$; ainsi le lieu des points o sera la circonférence réciproque de la droite DE, parallèle à la tangente fixe AB, par rapport au pôle I et à la constante BI.

THÉORÈME. — *Le lieu du centre d'une hyperbole équilatère touchant deux droites, dont l'une en un point donné, est une circonférence qui touche, au point de concours des tangentes, celle dont le point de contact est assigné, et ayant son centre sur la perpendiculaire abaissée de celui-ci sur la seconde tangente.*

Démonstration. — Soient (*fig.* 1) AB, AD les tangentes et B le point de contact fixe. Considérons un point de contact variable, D. Le centre de l'hyperbole correspondante sera à l'intersection de la droite AI qui passe par le milieu de BD, avec le cercle passant par les points I, D et C; C étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur AD. J'élève AF perpendiculaire à AB, et je construis le parallélogramme ABDE. L'angle AFD étant droit, on aura

$$\mathrm{AG}.\mathrm{AF} = \mathrm{AC}.\mathrm{AD} = \mathrm{A}o.\mathrm{AI};$$

ainsi les quatre points O, I, G, F sont sur une même circonférence. Donc

$$\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{IF}} = \frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AI}},$$

mais

$$\mathrm{AI} = \mathrm{IF},$$

par conséquent

$$\mathrm{OG} = \mathrm{AG},$$

c'est-à-dire que le point O appartient à un cercle ayant le point G pour centre et AG pour rayon. C. Q. F. D.

Corollaire. — Le centre de l'hyperbole touchant trois droites, avec un point de contact donné, sera situé à l'intersection de deux circonférences ayant pour axe radical la droite des milieux dénommée ci-dessus.

Remarque. — Un triangle acutangle ne saurait être circonscrit à l'hyperbole équilatère; car, prenant un point de contact sur un des côtés, on aurait pour déterminer le centre, en vertu de ce qui précède, deux cercles qui ne se couperaient pas. Pour un triangle obtusangle, les points de contact pourront être sur les prolongements des côtés de l'angle obtus ou sur la base même.

II.

Comment prouver, sans calcul, que toutes les hyperboles équilatères, inscrites à un triangle, ont leurs centres sur son *cercle des hauteurs?* Prenons d'abord deux tangentes et une asymptote. J'observerai que, si les côtés non parallèles d'un trapèze sont à angle droit, les points de rencontre des hauteurs des deux triangles formés respectivement avec les diagonales et les côtés non parallèles sont, avec le sommet de l'angle droit, sur une ligne perpendiculaire à celle qui joint les milieux des côtés non parallèles. Cette propriété découle immédiatement du théorème sur la ligne des hauteurs dans le quadrilatère, mais on peut l'établir directement.

Soit ABCD (*fig.* 2) un trapèze satisfaisant aux conditions requises. Prouvons que le point de rencontre H des hauteurs du triangle ACI forme, avec le point de rencontre des diagonales, l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant O pour sommet de l'angle droit. Cela revient à faire voir que le quadrilatère PHOI est inscriptible, ou que

$$POI = PHI.$$

Or

$$POI = POB - IOB = PAB - IOB$$

et

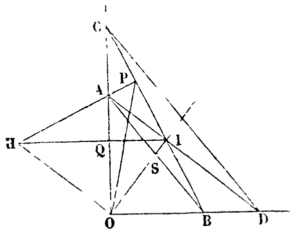
$$PHI = 1\ \mathrm{dr} - IBO.$$

Il faut donc que

$$PAB + IBS = 1\ \mathrm{dr},$$

S milieu de AB; ce qui est évident. Donc, en décrivant

Fig. 2.



sur IH comme diamètre une circonférence, elle coupera l'asymptote au centre O de la courbe.

Corollaire. — On a

$$HQ.HI = \overline{OH}^2,$$

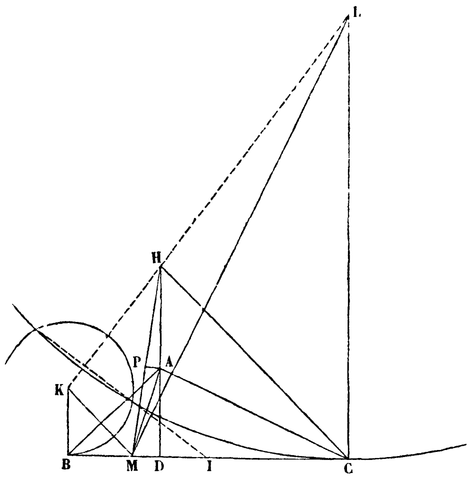
c'est-à-dire que le point O appartient aussi à la circonférence des hauteurs du triangle ACI; en d'autres termes : *Le centre d'une hyperbole équilatère tangente à deux droites est situé sur la circonférence des hauteurs relative au triangle formé par ces deux tangentes et une asymptote.*

A présent, les cercles des hauteurs relatifs aux quatre triangles du quadrilatère, ayant par côtés trois tangentes et une asymptote, ont même axe radical, *parce qu'il s'agit de triangles obtusangles.* Or, trois d'entre eux renferment le centre de l'hyperbole équilatère, qui sera par conséquent sur le quatrième.

A cette démonstration géométrique je joindrai la suivante.

Choisissons un point de contact M (*fig.* 3), sur le côté BC opposé à l'angle obtus A. Je dis que les cercles K, L, déterminés d'après le second théorème du § I, ont un même axe radical avec le cercle des hauteurs. En effet, le point M a pour polaires par rapport à ces cercles les côtés AB, AC; donc le milieu de AM est sur leur axe radical, d'après un théorème très-connu.

Fig. 3.



Le milieu I de la base fait également partie de cet axe. Si l'on mène AP perpendiculairement à MH, évidemment MH.HP = AH.HD ou le carré du rayon du cercle H; donc AP est la polaire du point M par rapport à ce cercle, et le milieu de AM appartient encore à l'axe radical des cercles K et H. Enfin, le cercle décrit sur BC comme diamètre, étant orthogonal à la fois aux cercles K et H, sera pareillement sur leur axe radical.... Les deux cercles variables K et L se couperont par suite sur le cercle des hauteurs.

C. Q. F. D.

Les trois centres K, H, L restent en ligne droite dans le triangle acutangle, quoique les cercles n'aient plus le même axe radical. La preuve de ce fait n'offre aucune difficulté.

III.

Les considérations actuelles ayant de l'importance par l'extension qu'elles reçoivent dans les surfaces du second ordre, ainsi que je le montrerai prochainement, je résoudrai ce problème plus général :

Trouver le lieu géométrique des centres des coniques touchant deux droites, dont l'une en un point donné, et telles, que la somme algébrique des carrés de leurs axes soit connue.

Solution. — Soit, par exemple, O le centre d'une ellipse inscrite à un angle A, on obtient facilement cette équation :

$$a^2 + b^2 = \overline{AO}^2 - 2aK\cot A,$$

où a et b représentent les demi-axes et K le rayon focal relatif au sommet de l'angle, je veux dire la distance de ce sommet aux quatre rayons vecteurs de contact.

En effet, le triangle qui a pour côtés $2a$, AF, AF′ en longueurs donne

$$\begin{aligned} 4a^2 &= \overline{AF}^2 + \overline{AF'}^2 - 2AF.AF'\cos A \\ &= 2\overline{MO}^2 + 2c^2 - 2AF.AF'\cos A, \end{aligned}$$

ou

$$a^2 + b^2 = \overline{AO}^2 - AF.AF'\cos A.$$

Mais AF.AF′ sin A et $2a$K mesurent le double de la surface du triangle AFF′ ; donc

$$a^2 + b^2 = \overline{AO}^2 - 2aK\cot A.$$

D'autre part, la surface du triangle formé par le sommet de l'angle, le centre et l'un des points de contact s'exprime évidemment par $\frac{\alpha K}{2}$; de sorte que α désignant la portion de tangente donnée, et l la distance du centre à cette tangente, on aura

$$a^2 + b^2 = \overline{AO}^2 - 2l\alpha \cot A,$$

équation d'un cercle dont le centre ne dépend nullement du carré $a^2 + b^2$. C'est le même point que pour l'hyperbole équilatère.

Ajoutons une troisième tangente, le point de contact demeurant invariable; à chaque valeur du carré correspondra, pour déterminer le centre de la conique, une couple de cercles ayant pour axe radical la droite allant du milieu de la portion de tangente interceptée entre les tangentes à contact arbitraire, au milieu de la distance entre le point de contact et le sommet opposé du triangle circonscrit. En outre, ces deux cercles auront même axe radical avec un cercle ayant son centre au point de rencontre des hauteurs et un rayon variable avec le carré donné. Donc, *toutes les coniques inscrites à un triangle, et ayant la même somme algébrique des carrés de leurs axes, ont leurs centres sur un cercle concentrique au cercle des hauteurs.*

Remarque. — La ligne des centres passe par le point de rencontre des hauteurs, perpendiculairement au diamètre de la parabole inscrite au triangle et touchant la base en un point donné : elle sera donc la directrice de cette parabole. D'où ce théorème :

Par le sommet d'un angle circonscrit à la parabole, on élève une perpendiculaire à l'un des côtés, et du point de contact de celui-ci on en abaisse une sur le se-

cond côté. Ces deux perpendiculaires se coupent sur la directrice.

Note. — Dans l'article inséré au tome précédent, page 535, il faut lire « même puissance respective » au lieu de « la même puissance en valeur absolue » ; et, page 536, il est nécessaire que le *triangle circonscrit à une conique* soit obtusangle.