NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Sur l'ellipse de surface maximum parmi toutes celles que l'on peut inscrire ou circonscrire à un quadrilatère donné

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 303-311

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__303_1>

SUR L'ELLIPSE DE SURFACE MAXIMUM
parmi toutes celles que l'on peut inscrire ou circonscrire à un quadrilatère donné;

PAR M. PAUL SERRET.

1. Si l'on désigne par ω_1, ω_2, ω_3 les inclinaisons, sur un axe quelconque ox, des normales aux côtés 1, 2, 3 d'un triangle; par a, b et ω les demi-axes d'une ellipse *conjuguée* au triangle et l'inclinaison de l'axe $2a$ sur ox; enfin par P_1, P_2, P_3 les distances du centre de l'ellipse aux côtés 1, 2, 3 du triangle conjugué : les dépendances existant entre le triangle et la courbe se traduisent par les trois relations

$$(C)\begin{cases}(1)\quad (a^2+b^2)\cos(\omega_1-\omega_2)+(a^2-b^2)\cos(\omega_1+\omega_2-2\omega)=2P_1P_2,\\ (2)\quad (a^2+b^2)\cos(\omega_2-\omega_3)+(a^2-b^2)\cos(\omega_2+\omega_3-2\omega)=2P_2P_3,\\ (3)\quad (a^2+b^2)\cos(\omega_3-\omega_1)+(a^2-b^2)\cos(\omega_3+\omega_1-2\omega)=2P_3P_1,\end{cases}$$

que l'on obtient, conformément à la méthode dont j'ai déjà donné diverses applications, en rapportant d'abord le triangle conjugué aux axes de la courbe, et transportant ensuite les relations obtenues à des axes quelconques.

2. Les équations (C) se prêtent aisément à la détermination de la somme $a^2 + b^2$ des carrés des axes, par l'élimination simultanée des inconnues $a^2 - b^2$ et ω.

On a, en effet, l'identité

$$(i) \quad \cos a . \sin(b-c) + \cos b . \sin(c-a) + \cos c . \sin(a-b) = 0,$$

et si on l'applique aux trois angles

$$a = \omega_1 + \omega_2 - 2\omega, \quad b = \omega_2 + \omega_3 - 2\omega, \quad c = \omega_3 + \omega_1 - 2\omega,$$

d'où

$$b - c = \omega_2 - \omega_1, \quad c - a = \omega_3 - \omega_2, \quad a - b = \omega_1 - \omega_3,$$

on trouve, en ajoutant les équations (1), (2), (3), multipliées respectivement par $\sin(\omega_1 - \omega_2)$, $\sin(\omega_2 - \omega_3)$, $\sin(\omega_3 - \omega_1)$,

$$(a^2 + b^2) \sum \sin(\omega_1 - \omega_2)\cos(\omega_1 - \omega_2) = 2 \sum P_1 P_2 \sin(\omega_1 - \omega_2).$$

le terme en $(a^2 - b^2)$ ayant disparu en vertu de l'identité (i).

Or, l'origine des coordonnées, ou l'origine des distances négatives P_1, P_2, P_3, étant supposée dans l'intérieur du triangle 1 2 3; les facteurs $\sin(\omega_1 - \omega_2)$, $\sin(\omega_2 - \omega_3)$,..., $\cos(\omega_1 - \omega_2)$, $\cos(\omega_2 - \omega_3)$,..., changés de signe, représentent les sinus et cosinus des angles mêmes A_3, A_1, A_2 du triangle; l'équation précédente peut donc s'écrire

$$(\mathrm{I}) \qquad (a^2 + b^2) \sum \sin A_1 \cos A_1 = -2 \sum P_1 P_2 \sin A_3:$$

et l'on reconnaît, dans le second membre, la fonction du cercle circonscrit au triangle; dans l'équation elle-même, l'expression analytique du théorème de M. Faure.

3. *Le rectangle $a^2 b^2$ des carrés des axes peut aussi se déduire des équations* (C). Le calcul présente d'abord

une grande complication. Si l'on poursuit toutefois, il se simplifie singulièrement et se résout enfin en ce théorème.

Le rectangle, positif ou négatif, *des carrés des demi-axes d'une conique est égal et de signe contraire au produit* ($\gtrless 0$) *des distances du centre de la courbe aux côtés d'un triangle* conjugué *quelconque, multiplié par le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle :*

$$(\mathrm{II}) \qquad a^2.b^2 = -2\mathrm{R}.\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3,$$

les distances P_1, P_2, P_3 étant d'ailleurs toutes les trois négatives pour un point situé à l'intérieur du triangle.

4. La relation (II) étant donnée, il est facile, abstraction faite des signes, de l'établir par la Géométrie.

Soient, en effet, O (*) le centre de la courbe; a_1, a_2, a_3 et S les côtés et l'aire du triangle conjugué $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$. Si l'on remplace $2\mathrm{R}$ par $\dfrac{a_1.a_2.a_3}{2\mathrm{S}}$, la formule (II) pourra s'écrire

$$\frac{a_1\mathrm{P}_1.a_2\mathrm{P}_2.a_3\mathrm{P}_3}{2\mathrm{S}} = a^2b^2,$$

ou encore

$$2\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2.2\mathrm{OA}_1\mathrm{A}_3.\frac{\mathrm{OA}_2\mathrm{A}_3}{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = a^2b^2;$$

ou enfin

$$(\mathrm{II}') \qquad \sin^2\theta.\overline{\mathrm{OA}_1}^2.p\mathrm{A}_2.p\mathrm{A}_3.\frac{\mathrm{O}p}{\mathrm{A}_1p} = a^2b^2:$$

en appelant p la trace du côté $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ sur le diamètre OA_1, et θ l'inclinaison de ce côté sur ce diamètre. Or, si, rapportant la courbe aux diamètres conjugués OA_1, ou $\mathrm{O}x$, et $\mathrm{O}y$ parallèle à $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$; on désigne par a_1, b_1 les demi-diamètres correspondants; par x l'abscisse $\mathrm{O}p$, on trouve

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

successivement

$$OA_1 = \frac{a_1^2}{x},$$

ou

$$\overline{OA_1}^2 = \frac{a_1^4}{x^2},$$

$$pA_2 . pA_3 = \overline{pm}^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - x^2),$$

$$\frac{Op}{A_1 p} = \frac{x}{\frac{a_1^2}{x} - x} = \frac{x^2}{a_1^2 - x^2};$$

et ces valeurs étant substituées dans la relation (II′), elle se réduit effectivement à une identité :

$$\frac{a_1^4}{x} \cdot \frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - x^2) \cdot \frac{x^2}{a_1^2 - x^2} \cdot \sin^2\theta = a^2 b^2$$

ou

$$a_1^2 b_1^2 . \sin^2\theta = a^2 b^2 \ (*).$$

5. *Définir l'ellipse de surface maximum parmi toutes celles que l'on peut inscrire à un quadrilatère donné.* (*Voir*, pour une solution antérieure de ce problème, Steiner-Terquem, *Nouvelles Annales*, 1845.)

Une conique étant inscrite à un quadrilatère, on sait que le *triangle* $A_1 A_2 A_3$, ayant pour côtés les trois diagonales du quadrilatère, est *conjugué* par rapport à la courbe : le rectangle des carrés des axes de celle-ci étant dès lors proportionnel au produit des distances de son centre aux côtés de ce triangle et devenant maximum, ou minimum, en même temps que ce produit. D'ailleurs, le lieu des centres des coniques inscrites n'est autre, comme

(*) Une seconde démonstration géométrique s'applique d'elle-même au cas du tétraèdre, et se traduit alors par la formule

$$a^2 . b^2 . c^2 = k . P_1 P_2 P_3 P_4,$$

où k désigne une grandeur géométrique ne dépendant que du tétraèdre donné.

on sait, que la droite des milieux des diagonales du quadrilatère. Si donc on appelle a_1, a_2, a_3 les traces de cette droite sur les côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$; O le centre de l'une des courbes que l'on cherche, le point O devra satisfaire à la condition

$$Oa_1.Oa_2.Oa_3 = \text{maximum}.$$

De là, et par une notation suffisamment claire par elle-même,

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = \text{maximum},$$

d'où enfin

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \frac{1}{x - a_3} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{Oa_1} + \frac{1}{Oa_2} + \frac{1}{Oa_3} = 0:$$

équation du second degré dont les racines, toujours réelles, sont séparées par les nombres a_1, a_2, a_3. Deux coniques répondent donc toujours à la question proposée, à savoir : une ellipse dont le centre est compris entre les points milieux a_1, a_2 des premières diagonales, et dont la surface est maximum; une hyperbole dont le rectangle des axes est aussi maximum et dont le centre tombe entre les points milieux a_2, a_3 de la seconde et de la troisième diagonale.

On retrouve ainsi la solution déjà mentionnée de Steiner, mais par une méthode différente, plus simple aussi et qui se prête encore au problème suivant, dont la construction définitive dépend d'ailleurs d'une équation du troisième degré.

6. *Définir l'ellipse de surface maximum parmi toutes celles que l'on peut circonscrire à un quadrilatère donné.*

Une conique étant circonscrite à un quadrilatère, on sait que le *triangle* ABC, ayant pour sommets les trois points de concours des diagonales et des côtés opposés du quadrilatère, est *conjugué* relativement à la courbe : le rectangle des carrés des axes de celle-ci étant dès lors proportionnel au produit des distances de son centre aux côtés de ce triangle, et devenant maximum, ou minimum, en même temps que ce produit. D'ailleurs, le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère est une courbe du second ordre, circonscrite, comme on sait, au même triangle ABC.

Si l'on désigne dès lors par a, b, c et S les longueurs des côtés et l'aire de ce triangle ; par

$$0 = A = B = C$$

les équations de ses côtés, mises sous la forme

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0;$$

par

$$\alpha . BC + \beta\ CA + \gamma . AB = 0$$

l'équation de la courbe lieu des centres : les coordonnées du centre de la courbe que l'on cherche seront les valeurs de A, B, C satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(1) \qquad a.A + b.B + c.C = -2S = \text{const.},$$

$$(2) \qquad \alpha.BC + \beta.CA + \gamma.AB = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0,$$

$$(3) \qquad A.B.C = \text{maximum}.$$

Or, le centre se mouvant sur une courbe déterminée (2), les coordonnées A, B, C du centre sont des fonctions déterminées d'une même variable, de l'abscisse x du centre, par exemple. On posera donc, en appelant A′, B′, C′ les dérivées de ces fonctions, prises par rapport à x,

$$(1') \qquad a.A' + b.B' + c.C' = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{\alpha}{A^2} \cdot A' + \frac{\beta}{B^2} \cdot B' + \frac{\gamma}{C^2} \cdot C' = 0,$$

$$(3') \qquad \frac{1}{A} \cdot A' + \frac{1}{B} \cdot B' + \frac{1}{C} \cdot C' = 0.$$

De là, par l'élimination des dérivées,

$$a\left(\frac{\beta}{B^2C}-\frac{\gamma}{C^2B}\right)+b\left(\frac{\gamma}{C^2A}-\frac{\alpha}{A^2C}\right)+c\left(\frac{\alpha}{A^2B}-\frac{\beta}{B^2A}\right)=0;$$

ou, en multipliant par $A^2B^2C^2$ et divisant par $\alpha\beta\gamma$,

$$(2'')\quad \frac{a}{\alpha}\cdot A^2\left(\frac{B}{\beta}-\frac{C}{\gamma}\right)+\frac{b}{\beta}B^2\left(\frac{C}{\gamma}-\frac{A}{\alpha}\right)+\frac{c}{\gamma}C^2\left(\frac{A}{\alpha}-\frac{B}{\beta}\right)=0:$$

équation d'une courbe du troisième ordre dont les traces sur la courbe des centres (2) déterminent les points cherchés. Or les courbes (2) et (2″) sont, l'une et l'autre, circonscrites au triangle de référence ABC dont les sommets sont, dès lors, trois des six points communs aux deux courbes, et représentent les centres des trois systèmes de deux droites que l'on peut circonscrire au quadrilatère donné, ou les centres des coniques circonscrites pour lesquelles le rectangle des axes est nul. Laissant donc de côté ces trois premiers points, les trois autres points communs aux deux courbes fourniront seuls la véritable solution du problème. Or il est aisé de voir que ces trois derniers points sont toujours réels; deux de ces points, si le quadrilatère proposé est convexe, définissant les centres de deux hyperboles circonscrites dont le rectangle des axes est *maximum;* le troisième servant de centre à une ellipse circonscrite d'aire minimum.

7. L'ellipse (a, b) se transformant, sous les conditions ordinaires, en une parabole de paramètres $2p$; il est facile de voir que la formule (II) se transforme en même temps en celle-ci :

$$\text{(III)}\qquad p=-2R.\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3;$$

α_1, α_2, α_3 désignant les cosinus des inclinaisons, sur l'axe de la parabole, des normales aux côtés 1, 2, 3 d'un *triangle conjugué* quelconque. D'ailleurs, suivant une remarque faite d'abord, ce me semble, par M. Mention, le triangle ayant pour sommets les points milieux des côtés d'un triangle conjugué à la parabole est de lui-même circonscrit à la courbe; et réciproquement.... De là, en remarquant que les rayons des cercles circonscrits au premier et au second triangle sont dans le rapport de 2 à 1,

$$(\mathrm{IV}) \qquad p = -4\,\mathrm{R}.\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3,$$

ou

$$(\mathrm{IV}') \qquad p^2\mathrm{R} = 2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3:$$

formule que l'on peut vérifier directement et qui donne le demi-paramètre p d'une parabole inscrite à un triangle en fonction des distances P_1, P_2, P_3 du foyer aux trois côtés du triangle et du rayon R du cercle circonscrit.

8. On déduit sans peine de la formule (IV′) la solution du problème suivant, proposé par Steiner : *Trouver la parabole de paramètre maximum parmi toutes celles que l'on peut inscrire à un triangle donné.*

Conservant, en effet, toutes les notations du n° 6, les coordonnées (A, B, C) du foyer de la parabole que l'on cherche devront satisfaire aux conditions suivantes :

$$(1) \qquad a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} = -2\mathrm{S} = \text{const.},$$

$$(2) \qquad \frac{a}{\mathrm{A}} + \frac{b}{\mathrm{B}} + \frac{c}{\mathrm{C}} = 0,$$

$$(3) \qquad \mathrm{A}.\mathrm{B}.\mathrm{C} = \text{maximum}.$$

On en déduit

$$(1') \qquad a\mathrm{A}' + b\mathrm{B}' + c\mathrm{C}' = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{a}{\mathrm{A}^2}.\mathrm{A}' + \frac{b}{\mathrm{B}^2}.\mathrm{B}' + \frac{c}{\mathrm{C}^2}.\mathrm{C}' = 0,$$

$$(3') \qquad \frac{1}{\mathrm{A}}.\mathrm{A}' + \frac{1}{\mathrm{B}}.\mathrm{B}' + \frac{1}{\mathrm{C}}.\mathrm{C}' = 0;$$

d'où, par l'élimination des dérivées,

$$(2'') \quad \frac{A}{a}(B^2 - C^2) + \frac{B}{b}(C^2 - A^2) + \frac{C}{c}(A^2 - B^2) = 0:$$

équation d'une courbe de troisième ordre, circonscrite au triangle des axes ABC, et dont les traces, sur le cercle circonscrit (2), sont les foyers des paraboles cherchées. Ces six traces, d'ailleurs, sont toujours réelles; et les sommets du triangle des axes étant laissés de côté, les trois derniers points, communs au cercle (2) et à la courbe (2″), sont les foyers de trois paraboles de paramètre maximum qui répondent à la question.

9. Le cas de la *parabole de paramètre maximum, circonscrite à un triangle donné,* se traiterait de même à l'aide d'une formule connue, toute semblable à la formule (IV).