NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. REALIS

Sur une classe d'équations résolues par Moivre et leurs dérivées

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 289-303

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__289_0>

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS RÉSOLUES PAR MOIVRE ET LEURS DÉRIVÉES

(voir page 209);

PAR M. S. REALIS.

4. Passons maintenant aux équations de degré pair, et posons

$$f(x) = x^n - npx^{n-2} + \ldots + P_{2h} p^h x^{n-2h} + \ldots \mp 2p^{\frac{n}{2}} + q,$$

où le dernier terme sera

$$-2p^{\frac{n}{2}} + q \quad \text{ou} \quad +2p^{\frac{n}{2}} + q,$$

selon que $\frac{n}{2}$ sera un nombre impair ou un nombre pair.

Les n racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

seront encore données par la formule (3) (p. 213) en y mettant pour α une racine absolue quelconque de

$$\alpha^n - 1 = 0,$$

et faisant ensuite, successivement, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Remarquons avant tout que puisque α, étant racine absolue, ne satisfait pas à l'équation

$$\alpha^{\frac{n}{2}} - 1 = 0,$$

elle satisfera à l'équation

$$\frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{\frac{n}{2}} - 1} = 0;$$

par où l'on voit que l'on aura

$$\alpha^{\frac{n}{2}}+1=\alpha^{\frac{n}{2}-1}+\alpha^{n-1}=\alpha^{\frac{n}{2}-2}+\alpha^{n-2}=\ldots$$
$$=\alpha^2+\alpha^{\frac{n}{2}+2}=\alpha+\alpha^{\frac{n}{2}+1}=0,$$

et, par suite,

$$x_{\frac{n}{2}}+x_n=x_{\frac{n}{2}-1}+x_{n-1}=x_{\frac{n}{2}-2}+x_{n-2}=\ldots$$
$$=x_2+x_{\frac{n}{2}+2}=x_1+x_{\frac{n}{2}+1}=0.$$

Les racines x sont donc distribuées par couples de valeurs égales deux à deux et de signes contraires ; cela était indiqué d'avance par la forme même de l'équation qui ne contient que des puissances paires de l'inconnue, mais les formules qu'on vient d'écrire donnent le moyen d'assigner pour chaque racine celle qui lui est égale et de signe contraire dans la série des valeurs fournies par l'expression générale (3).

5. Ici il convient de distinguer deux cas, selon que n est un nombre impairement pair ou pairement pair.

Soit d'abord le premier cas, pour lequel le dernier terme de $f(x)$ est

$$-2p^{\frac{n}{2}}+q,$$

et supposons que l'on ait

$$-2p^{\frac{n}{2}}+q=0;$$

d'où

$$\frac{q^2}{4}-p^n=0.$$

Remontant aux formules du n° 1, et ayant égard à la relation

$$\alpha^{\frac{n}{2}} + 1 = 0,$$

on voit aussitôt que les racines deviennent

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
x_1 = \alpha\sqrt{-p} + \dfrac{p}{\alpha\sqrt{-p}} = (\alpha - \alpha^{n-1})\sqrt{-p} \\
\quad = \left(\alpha + \alpha^{\frac{n}{2}-1}\right)\sqrt{-p}. \\
x_2 = \left(\alpha + \alpha^{\frac{n}{2}-2}\right)\sqrt{-p}. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_{\frac{n}{2}} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_{n-1} = -\left(\alpha^{\frac{n}{2}-1} + \alpha\right)\sqrt{-p}, \\
x_n = 0,
\end{array}\right.$$

et sont liées entre elles par les relations

$$\begin{array}{l}
x_1 = x_{\frac{n}{2}-1} = -x_{\frac{n}{2}+1} = -x_{n-1}, \\
x_2 = x_{\frac{n}{2}-2} = -x_{\frac{n}{2}+2} = -x_{n-2}, \\
x_3 = x_{\frac{n}{2}-3} = -x_{\frac{n}{2}+3} = -x_{n-3}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{\frac{n}{2}} = x_n = 0.
\end{array}$$

Il y a donc deux racines nulles ; les autres sont égales deux à deux, et à chaque couple de ces valeurs prises positivement il correspond un couple des mêmes valeurs prises négativement. Le polynôme $f(x)$ se réduit, par conséquent, à un carré de la forme

$$x^2(x^2-x_1^2)^2(x^2-x_2^2)^2\ldots\left(x^2-x^2_{\frac{n-2}{4}}\right)^2,$$

x_1, x_2, ..., $x_{\frac{n-2}{4}}$ étant les $\frac{n-2}{4}$ premières expressions (4) ci-dessus.

Toutes ces racines sont réelles, car les sommes $\alpha+\alpha^{\frac{n}{2}-1}$, $\alpha^2+\alpha^{\frac{n}{2}-2}$, ... (égales respectivement aux différences $\alpha-\alpha^{n-1}$, $\alpha^2-\alpha^{n-2}$, ...), sont toutes de la forme $R\sqrt{-1}$, et, multipliées par $\sqrt{-p}$, donnent un produit réel.

Les expressions (4) font voir que l'équation proposée est égale au carré de l'équation de degré sous-double considérée dans la remarque qui termine le n° 3 (où il faut remplacer par $\frac{n}{2}$ l'exposant qui y est indiqué par n, et faire attention que la quantité désignée par α n'est autre que celle désignée ici également par α, prise en signe contraire). Cela résulte aussi de ce qu'on a

$$y^n+\frac{p^n}{y^n}+2p^{\frac{n}{2}}=\left(y^{\frac{n}{2}}+\frac{p^{\frac{n}{2}}}{y^{\frac{n}{2}}}\right)^2,$$

ou, puisque $\frac{n}{2}$ est supposé impair,

$$x^n-npx^{n-2}+\ldots+\frac{n^2}{4}p^{\frac{n-2}{2}}x^2$$
$$=\left(x^{\frac{n}{2}}-\frac{n}{2}px^{\frac{n}{2}-2}+\ldots\mp\frac{n}{2}p^{\frac{n-2}{4}}x\right)^2.$$

Cela posé, égalons à zéro la dérivée de $f(x)$; nous aurons, en désignant par $\varphi(x)$ le premier membre de l'équation de degré $\frac{n}{2}$ qu'on vient de citer,

$$f'(x) = 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0.$$

Cette équation a d'abord en commun avec $f(x) = 0$ les $\frac{n}{2}$ racines qui satisfont à l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

savoir :

$$0, \quad \pm x_1, \quad \pm x_2, \ldots, \quad \pm x_{\frac{n-2}{4}};$$

les $\frac{n}{2} - 1$ autres racines, c'est-à-dire celles qui satisfont à

$$\varphi'(x) = 0,$$

seront, d'après ce qu'on vu au n° 3,

$$\pm \gamma_1\sqrt{p}, \quad \pm \gamma_2\sqrt{p}, \ldots, \quad \pm \gamma_{\frac{n-2}{4}}\sqrt{p};$$

les γ désignent ici les $\frac{n-2}{4}$ valeurs que prend la fonction $\gamma_k = \alpha^k + \frac{1}{\alpha^k}$, pour k égal successivement à 1, 2, 3,..., $\frac{n-2}{4}$, en y mettant pour α une racine absolue quelconque de l'équation

$$\alpha^{\frac{n}{2}} - 1 = 0.$$

Désignons maintenant par a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, les racines de $f'(x) = 0$ rangées par ordre de grandeur croissante, en nous rappelant que l'on aura

$$a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \ldots = a_{\frac{n}{2}} = 0.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans $f(x)$, il viendra, d'après les résultats du n° 3, et en faisant attention que chaque racine a doit, ou annuler $f(x)$, ou être comprise entre deux racines consécutives et distinctes de $f'(x)$,

$$\begin{cases} f(a_1) = f(a_3) = \ldots = f\left(a_{\frac{n}{2}}\right) = \ldots = f(a_{n-1}) = 0, \\ f(a_2) = f(a_4) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = f(a_{n-2}) = 4p^{\frac{n}{2}}. \end{cases}$$

On représente d'une manière abrégée ces relations importantes en écrivant

$$\begin{cases} f(a_{2k+1}) = 0, \\ f(a_{2k}) = 4p^{\frac{n}{2}}. \end{cases}$$

6. Si l'on avait

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

q étant négatif, le dernier terme de $f(x)$ serait $-4p^{\frac{n}{2}}$, et les valeurs de x auraient pour expressions

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 = (\alpha + \alpha^{n-1})\sqrt{p}, \\ x_2 = (\alpha^2 + \alpha^{n-2})\sqrt{p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{\frac{n}{2}} = 2\alpha^{\frac{n}{2}}\sqrt{p}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ x_n = 2\sqrt{p}, \end{cases}$$

où $\sqrt{p}$ doit être pris partout avec le même signe, soit positif, soit négatif.

Ces racines se partagent en groupes d'après les relations

$$x_1 = x_{n-1} = -x_{\frac{n}{2}-1} = -x_{\frac{n}{2}+1},$$

$$x_2 = x_{n-2} = -x_{\frac{n}{2}-2} = -x_{\frac{n}{2}+2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{\frac{n}{2}} = -x_n,$$

à cause de

$$\alpha^{\frac{n}{2}} + 1 = 0.$$

Les racines a seraient d'ailleurs les mêmes que ci-dessus, et l'on aurait

$$\begin{cases} f(a_{2h-1}) = -4p^{\frac{n}{2}}, \\ f(\alpha_{2k}) = 0. \end{cases}$$

Quand on n'a pas

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

les racines de l'équation

$$f(x) = x^n - npx^{n-2} + \ldots + \frac{n^2}{4}p^{\frac{n-2}{2}}x^2 - 2p^{\frac{n}{2}} + q = 0$$

ne sont plus données par les expressions (4) ni par les expressions (5) ci-dessus, et il faut avoir recours en général aux valeurs fournies par la formule (3). Mais les quantités a ne changeront pas, et l'on trouvera facilement, comme dans le n° 3, les valeurs de $f(a_{2h+1})$ et de $f(a_{2k})$ qui conviendront aux différentes relations que l'on peut supposer entre p et q.

Il est à remarquer que lorsque $f(x) = 0$ a des racines réelles (au moins deux), ce qui a lieu quand

$$-2p^{\frac{n}{2}} + q < 0, \quad \text{ou} \quad -2p^{\frac{n}{2}} + q = -r^2,$$

elle se décompose immédiatement en deux autres de degré sous-double, à cause que l'on aura

$$f(x) = [\varphi(x) + r][\varphi(x) - r],$$

$\varphi(x)$ étant le même polynôme considéré précédemment. Les expressions tirées de la formule (3) se simplifient donc en ce cas, et les deux équations dans lesquelles la proposée se décompose rentrent dans celles dont il a été question plus haut, aux n^{os} 2 et 3.

7. Il nous reste enfin à considérer les équations dont le degré est un nombre n pairement pair, c'est-à-dire multiple de 4. Soit donc, dans cette hypothèse,

$$f(x) = x^n - npx^{n-2} + \ldots + \mathrm{P}_{n-2}p^{\frac{n-2}{2}}x^2 + 2p^{\frac{n}{2}} + q,$$

et occupons-nous d'abord du cas où l'on aurait

$$2p^{\frac{n}{2}} + q = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

q étant négatif.

Désignons par α une racine absolue quelconque de

$$\alpha^n - 1 = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\alpha^{\frac{n}{2}} + 1 = 0,$$

et par suite

$$\alpha^{\frac{3n}{4}} + \alpha^{\frac{n}{4}} = 0,$$

et en général

$$\alpha^{\frac{n}{2}+k} + \alpha^k = 0.$$

Les racines de

$$f(x) = 0$$

seront encore données par

$$x_k = (\alpha^k + \alpha^{n-k})\sqrt{p},$$

en faisant $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, et le radical étant pris constamment avec le même signe.

On aura, en particulier,

$$x_{\frac{n}{4}} = \left(\alpha^{\frac{n}{4}} + \alpha^{\frac{3n}{4}}\right)\sqrt{p} = x_{\frac{3n}{4}} = 0,$$

$$x_n = 2\sqrt{p} = -x_{\frac{n}{2}},$$

et les autres racines seront liées entre elles, quatre par quatre, par les relations

$$x_1 = x_{n-1} = -x_{\frac{n}{2}-1} = -x_{\frac{n}{2}+1},$$

$$x_2 = x_{n-2} = -x_{\frac{n}{2}-2} = -x_{\frac{n}{2}+2},$$

$$x_3 = x_{n-3} = -x_{\frac{n}{2}-3} = -x_{\frac{n}{2}+3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le polynôme $f(x)$ se décompose donc comme il suit :

$$f(x) = x^2(x^2 - 4p)(x^2 - x_1^2)^2(x^2 - x_2^2)^2 \ldots \left(x^2 - x^2_{\frac{n-4}{4}}\right)^2$$

ou

$$f(x) = x^2(x^2 - 4p)(x^2 - \beta_1^2 p)^2(x^2 - \beta_2^2 p)^2 \ldots \left(x^2 - \beta^2_{\frac{n}{4}-1} p\right)^2,$$

en posant

$$\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} = \beta_k.$$

L'égalité

$$y^n + \frac{p^n}{y^n} = \left(y^{\frac{n}{2}} + \frac{p^{\frac{n}{2}}}{y^{\frac{n}{2}}} \right)^2 - 2p^{\frac{n}{2}}$$

se traduit ici dans la relation

$$f(x) = \varphi(x)^2 - 4p^{\frac{n}{2}},$$

à cause de

$$2p^{\frac{n}{2}} + q = 0;$$

$\varphi(x)$ désigne le polynôme

$$x^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} p x^{\frac{n}{2}-2} + \ldots + P_{2h} p^h x^{\frac{n}{2}-2h} + \ldots \mp 2p^{\frac{n}{4}}.$$

De cette relation on déduit, comme précédemment, l'abaissement des équations

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = 0$$

au moyen des équations

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = 0;$$

et l'on trouve ainsi

$$f(x) = \frac{1}{n^2} x^2 (x^2 - 4p) \left(\frac{\varphi'(x)}{x} \right)^2,$$

$$f'(x) = 2\varphi(x)\varphi'(x).$$

Soient maintenant $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ les racines de

$$f'(x) = 0$$

rangées par ordre de grandeur croissante, et effectuons la substitution de ces valeurs dans $f(x)$; nous obtiendrons, en abrégeant comme plus haut,

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = -4p^{\frac{n}{2}}, \\ f(a_{2h}) = 0. \end{cases}$$

8. Si, le degré n étant toujours pairement pair, q est positif, et

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

la proposée devient

$$f(x) = x^n - npx^{n-2} + \ldots + P_{n-2}p^{\frac{n-2}{2}}x^2 + 4p^{\frac{n}{2}} = 0.$$

Cette équation s'abaisse à l'aide de la relation

$$f(x) = \varphi(x)^2,$$

$\varphi(x)$ désignant le même polynôme que ci-dessus (n° 7); la dérivée sera d'ailleurs la même que précédemment. et les quantités a substituées dans $f(x)$ donneront les résultats

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = 0, \\ f(a_{2h}) = 4p^{\frac{n}{2}}. \end{cases}$$

De ce qui précède on déduit, comme dans le n° 3, les valeurs que prennent $f(a_{2h+1})$ et $f(a_{2h})$, lorsque le dernier terme de $f(x)$ est une quantité quelconque différente de zéro et de $4p^{\frac{n}{2}}$.

9. Reportons-nous à présent aux équations générales (1) et (2) du n° 1, où n est un nombre entier et positif quelconque, et supposons que l'on ait

$$\frac{q^2}{4} - p^n < 0,$$

ce qui rend imaginaires les valeurs de y et réelles les valeurs de x.

En posant

$$\cos g = -\frac{q}{2\sqrt{p^n}}, \quad u = \frac{y}{\sqrt{p}},$$

où nous conviendrons de prendre les radicaux $\sqrt{p^n}$ et $\sqrt{p}$ avec le signe positif, et l'angle g dans l'étendue de la demi-circonférence, l'équation (1) peut être remplacée par

$$u^{2n} - 2u^n \cos g + 1 = 0.$$

La résolution de cette équation donne

$$u^n = \cos g \pm \sqrt{-1}\sin g,$$

et, par suite,

$$u = \cos\frac{2m\pi + g}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi + g}{n},$$

formule dans laquelle, pour avoir toutes les valeurs de u, il faut faire successivement

$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad n - 1.$$

L'équation (2), à cause de

$$x = y + \frac{p}{y} = \left(u + \frac{1}{u}\right)\sqrt{p},$$

en y faisant

$$\frac{x}{\sqrt{p}} = z,$$

se trouvera remplacée par l'une ou l'autre des deux équations suivantes :

$$z^n - nz^{n-2} + \ldots + P_{2h} z^{n-2h} + \ldots \mp 2 - 2\cos g = 0,$$
$$z^n - nz^{n-2} + \ldots + P_{2h} z^{n-2h} + \ldots \mp nz - 2\cos g = 0,$$

selon que n sera un nombre pair ou impair.

Les valeurs de z seront donc fournies, dans tous les cas, par la formule

$$z = u + \frac{1}{u} = 2\cos\frac{2m\pi + g}{n},$$

en y donnant à m les n valeurs ci-dessus; d'où l'on tirera les valeurs de x au moyen de la relation

$$x = z\sqrt{p}.$$

On voit donc que dans le cas irréductible, c'est-à-dire lorsque toutes les racines sont réelles, l'équation générale de Moivre du degré n se rapporte à la division d'un arc de cercle en n parties égales, et peut être résolue d'une manière très-simple avec le secours des Tables trigonométriques. Cette équation revient, en effet, à la relation connue entre le cosinus de l'arc g et celui de l'arc $\frac{g}{n}$, et les valeurs de u ci-dessus expriment que la formule

$$u^{2n} - 2u^n\cos g + 1$$

a pour diviseurs réels du second degré les n valeurs différentes comprises dans la formule

$$u^2 - 2u\cos\frac{2m\pi + g}{n} + 1;$$

c'est le théorème célèbre que Moivre a démontré dans ses *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis.*

La résolution trigonométrique de l'équation en z, comme on sait, peut se tirer directement de la théorie des sections angulaires, sans la faire dépendre du théorème de Moivre. Ce théorème peut donc être établi, à son tour, d'une manière bien simple, en comparant les résultats de la résolution de l'équation en u considérée d'abord comme du second degré par rapport à u^n, et ensuite comme équation réciproque.

Si l'on supposait, en particulier, que l'on eût

$$g = 0, \quad \text{ou} \quad g = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad g = \pi.$$

l'équation (2) se rapporterait à la division de la circonférence en parties égales, selon le théorème de Cotes, et l'on tomberait sur les cas spéciaux dont il a été question dans les numéros précédents.

Quant à l'équation $f'(x) = 0$, elle est toujours résoluble trigonométriquement au moyen de la division de la circonférence en parties égales.

10. Si l'on construit sur deux axes restangulaires la courbe dont l'équation est

$$Y = f(x),$$

$f(x)$ étant le premier membre de l'équation (2), on reconnaît bientôt, d'après les résultats précédemment obtenus, la régularité remarquable de cette courbe dans les différents cas de n impair, ou impairement pair, ou pairement pair.

Il est visible que les circonstances que l'on a discutées relativement à la nature des racines de $f(x) = 0$ tiennent à la position de l'axe des x, lequel peut être déplacé parallèlement à lui-même, le paramètre p demeurant constant, de manière à donner lieu aux différentes relations entre p et q qui ont été examinées. Quant aux valeurs de Y correspondantes aux abscisses qui annulent $f'(x)$, elles font voir que les points *maximums* et *minimums* de la courbe sont déterminés par deux tangentes parallèles aux abscisses, et renfermant dans leur espacement toutes les ondulations que fait la courbe. Par là on se rend compte, d'une manière sensible, des conditions énoncées au n° 1. relativement à la réalité ou non-réalité des racines.

Une discussion plus approfondie des courbes paraboliques dont il s'agit mettrait en lumière quelques autres particularités dignes de remarque qu'elles présentent, tenant à la théorie des sections angulaires ; mais cela exige des considérations d'un genre différent de celles qui viennent d'être employées, et je ne crois pas devoir m'y arrêter ici.