OSSIAN BONNET

Note sur l'article précédent

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 267-271

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__267_1>

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT,

PAR M. OSSIAN BONNET.

Extrait d'une Lettre adressée au Rédacteur.

Je vous adresse un résumé du travail que j'ai présenté à la Société Philomathique, le 21 novembre 1863 (*). Vous y verrez une solution *complète* du problème de la détermination du rayon de courbure d'une courbe quelconque tracée sur une surface en un point pour lequel le plan osculateur est tangent à la surface. Le théorème élégant démontré, dans la Note précédente, par M. Beltrami est un cas très-particulier du résultat général que j'avais obtenu.

Soit une courbe Ω tracée sur une surface à courbures opposées Σ, et qui a au point M, pour plan osculateur, le plan tangent à la surface Σ. Appelons ρ le rayon de courbure et c le rayon de torsion de la courbe Ω au point M; désignons par ρ_0 le rayon de courbure au point M de la ligne asymptotique tangente en ce point à la courbe Ω, par R et R_1 les rayons de courbure principaux de la surface; on aura

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{2\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)}{1 - \frac{\sqrt{-RR_1}}{c}}$$

(*) Le samedi précédent, M. de la Gournerie avait indiqué une propriété qui, sans conduire d'une manière explicite au rayon de courbure de la courbe à nœuds provenant de l'intersection d'une surface à courbures opposées par son plan tangent, permet cependant d'obtenir simplement ce rayon de courbure dans quelques cas particuliers. M. de la Gournerie a depuis publié cette propriété avec une application au tore dans la troisième Partie de son *Cours de Géométrie descriptive*.

ou

$$\rho = \rho_0\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{-RR_1}}{c}\right).$$

Quand la courbe Ω est plane, on a $c = \infty$ et la formule devient

$$\rho = \frac{3}{2}\rho_0;$$

c'est le théorème démontré par M. Beltrami.

La formule (1) ramène la détermination du rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface en un point pour lequel le plan osculateur est tangent à la surface, à celle du rayon de courbure d'une ligne asymptotique. Voici la valeur que j'avais obtenue pour ce dernier rayon de courbure

$$(2)\qquad \frac{1}{\rho_0} = \frac{4(-RR_1)^{\frac{7}{8}}}{(R-R_1)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d.\left(\frac{-R_1}{R^3}\right)^{\frac{1}{8}}}{ds_1} \pm \frac{d.\left(\frac{R}{-R_1^3}\right)^{\frac{1}{8}}}{ds}\right].$$

R et R_1 représentent toujours les rayons de courbure principaux de la surface, les dérivées sont relatives à des déplacements effectués sur les sections principales; enfin, le double signe provient de ce que, en chaque point d'une surface, il passe deux lignes asymptotiques.

L'équation (2) conduit sur-le-champ à quelques conséquences importantes.

Supposons que Σ soit une surface du second degré : les lignes asymptotiques seront des droites, donc les deux valeurs de $\frac{1}{\rho_0}$ seront nulles, et l'on aura

$$\frac{d\left(\frac{-R_1}{R^3}\right)^{\frac{1}{8}}}{ds_1} = 0,\qquad \frac{d\left(\frac{R}{-R_1^3}\right)^{\frac{1}{8}}}{ds} = 0.$$

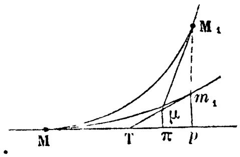
Ainsi, dans une surface du second degré, tout le long d'une même ligne de courbure, le rayon de courbure principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal. Réciproquement, quand dans une surface, tout le long des différentes lignes de courbure, le rayon de courbure principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal, on a, en tous les points,

$$\frac{d\left(\frac{-R_1}{R^3}\right)^{\frac{1}{8}}}{ds_1}=0, \quad \frac{d\left(\frac{R}{-R_1^3}\right)^{\frac{1}{8}}}{ds}=0;$$

les deux valeurs de $\frac{1}{\rho_0}$ sont nulles, donc les lignes asymptotiques sont des droites, et la surface est nécessairement du second degré.

J'ai démontré directement, dans le XXXII[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, que lorsqu'on considère trois séries de surfaces orthogonales et isothermes sur une même surface et sur une même ligne de courbure, le rayon de courbure principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal; donc une surface ne peut faire partie d'un système triplement isotherme et orthogonal sans être une surface du second degré. De là on conclut très-aisément le théorème de M. Lamé, d'après lequel le seul système de surfaces triplement isotherme et orthogonal est celui que forment les surfaces du second degré homofocales. On sait que ce théorème remarquable n'avait pu jusqu'ici être établi que par des considérations très-compliquées.

M. Beltrami, dans la Note intéressante qu'il vous a envoyée, démontre encore un théorème assez curieux sur le rayon de courbure de la section faite dans une surface développable par son plan tangent. Je connais ce théorème depuis bien longtemps; je ne l'ai pas non plus publié, mais je l'ai énoncé à différentes personnes : à M. Mannheim, à M. de la Gournerie, etc. Voici par quelles considérations je l'avais obtenu : soit une courbe gauche et sa projection sur son plan osculateur en M. On



sait que ces deux courbes auront non-seulement la même tangente MT, mais encore la même courbure au point M. Prenons sur la courbe un point M_1 infiniment voisin de M, et sur la projection le point correspondant m_1; menons les tangentes en ces points, lesquelles se couperont en un point μ de la courbe considérée. La distance $M_1 m_1$ du point M_1 au plan osculateur en M est du troisième ordre en fonction de $MM_1 = s$, on peut donc la représenter par ms^3, m étant une constante, et alors l'angle $M\mu m_1$ est égal à $3ms^2$. Cela étant,

$$m_1\mu = \frac{1}{3}s = \frac{2}{3}m_1\mathrm{T},$$

car $m_1\mathrm{T}$ est la moitié de $\mathrm{M}m_1$ ou de s; par conséquent

$$\mathrm{T}\mu = \frac{1}{3}\mathrm{T}m_1.$$

Abaissons maintenant $\mu\pi$ en $m_1 p$, toutes les deux perpendiculaires sur MT : nous trouverons aisément

$$\mu\pi = \frac{1}{3}m_1 p,\quad \mathrm{M}\pi = \frac{1}{2}\mathrm{M}p + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{M}p = \frac{2}{3}\mathrm{M}p.$$

De là on conclut d'abord que $\mu\pi$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à $\mathrm{M}\pi$, et par conséquent que MT est la tangente en M à la courbe lieu des points μ ; puis on a

$$\frac{\overline{M\pi}^2}{\mu\pi} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\overline{Mp}^2}{m_1 p},$$

ce qui prouve que le rayon de courbure en M de la courbe lieu des points μ est les $\frac{4}{3}$ du rayon de courbure de la courbe lieu des points m_1 ou de la courbe proposée.

C. Q. F. D.