NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE BELTRAMI

Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 258-267

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__258_1>

SUR LA COURBURE DE QUELQUES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE;

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI,
Professeur à l'Université de Pise.

Dans une Note insérée au tome III (2^e série) du *Journal de M. Liouville,* M. de la Gournerie a fait des remarques importantes au sujet des sections déterminées dans une surface par ses plans tangents. Il a, entre autres choses, établi bien clairement que les deux branches de ces sections n'ont en général qu'un contact du premier ordre avec les lignes asymptotiques de la surface.

En cherchant à déterminer la courbure de ces sections, au point où leur plan est tangent à la surface, je suis parvenu au théorème suivant :

Le rayon de courbure d'une ligne asymptotique, sur une surface quelconque, est toujours les deux tiers de celui de la section faite à la surface par le plan tangent au point considéré.

(Il est sous-entendu que l'on considère la branche de cette section, tangente à la ligne asymptotique.)

Désignons par s l'arc de la ligne asymptotique, et par $\varphi = 0$ l'équation de la surface. La propriété caractéristique de cette ligne est exprimée par l'équation

$$(1)\qquad \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2z}{ds^2}=0,$$

ou, en prenant la dérivée par rapport à s de l'équation

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{ds}=0$$

(qui exprime que la ligne est tracée sur la surface), par cette autre équation

$$(3)\qquad d\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}+d\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}+d\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}=0,$$

qui revient à celle dont se sert M. Dupin. Si l'on prend de nouveau la dérivée par rapport à s de cette dernière équation, on trouve, après quelques réductions,

$$(4)\qquad d\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+d\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+d\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{\Omega}{2\,ds^4}=0,$$

où Ω représente la somme des termes en $\frac{h^3}{6}$ dans le développement de

$$\varphi(x+h\,dx,\ y+h\,dy,\ z+h\,dz).$$

Les deux équations (2), (3), combinées avec la suivante,

$$(5)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

déterminent, pour chaque point de la surface, les directions des deux branches asymptotiques qui s'y entrecoupent, de sorte qu'on peut les regarder comme connues. Dans ce qui va suivre, nous supposerons que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ aient un des systèmes de valeurs fournis par (2), (3), (5).

Désignons par k un rapport à déterminer, et par h^2 la somme des carrés des trois dérivées partielles de la fonction φ : de l'équation (1) et de la suivante,

$$(6)\qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0,$$

on tire

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2}&=k\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{dz}{ds}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{dy}{ds}\right),\\ \frac{d^2y}{ds^2}&=k\left(\frac{d\varphi}{dz}\frac{dx}{ds}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{dz}{ds}\right),\\ \frac{d^2z}{ds^2}&=k\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{dy}{ds}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{dx}{ds}\right).\end{aligned}\right.$$

En ajoutant les carrés des deux membres de ces trois équations, on obtient

$$k=\frac{\pm 1}{\rho h},$$

où ρ est le rayon de courbure. Remplaçant dans l'équation (4) les dérivées secondes des coordonnées par les valeurs (7), et posant, pour abréger,

$$\begin{vmatrix} d\frac{d\varphi}{dx} & d\frac{d\varphi}{dy} & d\frac{d\varphi}{dz}\\ \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} & \frac{d\varphi}{dz}\\ dx & dy & dz \end{vmatrix}=\Delta,$$

on a cette valeur de ρ :

$$(8)\qquad \rho=\pm\frac{2\Delta\, ds}{h\Omega}.$$

On peut facilement transformer cette expression. Élevant le déterminant Δ au carré et tenant compte des formules précédentes, on trouve aisément

$$\Delta=\pm h\, ds\sqrt{\left(d\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(d\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(d\frac{d\varphi}{dz}\right)^2-dh^2},$$

ou bien

$$\Delta = \pm h^2 ds \sqrt{\left(d\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{h}\right)^2 + \left(d\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{h}\right)^2 + \left(d\frac{\frac{d\varphi}{dz}}{h}\right)^2}.$$

Si donc on appelle $d\psi$ la déviation de la normale à la surface le long de l'arc ds, on a simplement

$$\Delta = \pm h^2\, ds\, d\psi, \quad \text{et par suite} \quad \rho = \pm \frac{2h\, ds^2\, d\psi}{\Omega}.$$

Cette dernière formule donne lieu à quelques remarques que nous ne croyons pas devoir passer sous silence quoique étrangères à notre sujet.

Lorsque $\varphi(x, y, z)$ est une fonction entière du second degré, ses dérivées troisièmes étant nulles, il en est de même de Ω. Par suite, les deux systèmes de lignes asymptotiques ont partout un rayon de courbure infini, et ne peuvent être par conséquent que des lignes droites. Nous retrouvons ainsi le théorème connu, que *chaque surface du second degré est le lieu géométrique de deux systèmes de lignes droites* (réelles ou imaginaires).

La tangente à une ligne asymptotique étant conjuguée à elle-même, il est évident que pour toute surface réglée une des séries de lignes asymptotiques est formée par les génératrices rectilignes de la surface. Il faut donc que la quantité Ω soit annulée par la substitution des valeurs de dx, dy, dz répondant à la direction d'une génératrice. Donc si l'on élimine dx, dy, dz entre les équations

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0,$$

$$d\frac{d\varphi}{dx}\cdot dx + d\frac{d\varphi}{dy}\cdot dy + d\frac{d\varphi}{dz}\cdot dz = 0,$$

$$\Omega = 0,$$

le résultat de cette élimination sera une équation aux dérivées partielles du premier, deuxième et troisième ordre de la fonction φ, qu'on devra regarder comme appartenant à toutes les surfaces qu'on peut concevoir engendrées par le mouvement d'une droite. Ce résultat s'accorde avec celui auquel Monge est parvenu d'une manière différente au § XXI de son grand ouvrage sur l'*Application de l'analyse à la Géométrie.*

Revenons à notre question. La ligne plane, intersection de la surface par le plan tangent au point (x, y, z) est représentée par le système des deux équations suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0,\\ &(\xi - x)\frac{d\varphi}{dx} + (\eta - y)\frac{d\varphi}{dy} + (\zeta - z)\frac{d\varphi}{dz} = 0, \end{aligned}\right.$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées courantes. Désignant par σ l'arc de cette courbe, on déduit de la première de ces deux équations, par trois dérivations successives,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{d\varphi}{d\eta}\frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{d\varphi}{d\zeta}\frac{d\zeta}{d\sigma} = 0,\\ &\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \frac{d\varphi}{d\eta}\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} + \frac{d\varphi}{d\zeta}\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\\ &\qquad + \frac{d\frac{d\varphi}{d\xi}}{d\sigma}\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{d\frac{d\varphi}{d\eta}}{d\sigma}\frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{d\frac{d\varphi}{d\zeta}}{d\sigma}\frac{d\zeta}{d\sigma} = 0,\\ &\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d^3\xi}{d\sigma^3} + \frac{d\varphi}{d\eta}\frac{d^3\eta}{d\sigma^3} + \frac{d\varphi}{d\zeta}\frac{d^3\zeta}{d\sigma^3}\\ &\qquad + 3\left(\frac{d\frac{d\varphi}{d\xi}}{d\sigma}\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \frac{d\frac{d\varphi}{d\eta}}{d\sigma}\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} + \frac{d\frac{d\varphi}{d\zeta}}{d\sigma}\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right) + \frac{\Omega'}{d\sigma^3} = 0, \end{aligned}\right.$$

où Ω' a une signification analogue à celle de Ω. La se–

conde des équations (9), où x, y, z entrent comme des constantes, donne de son côté

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\xi}{d\sigma}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\eta}{d\sigma}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\zeta}{d\sigma}=0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}=0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^3\xi}{d\sigma^3}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^3\eta}{d\sigma^3}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^3\zeta}{d\sigma^3}=0.$$

Si l'on pose, dans les équations (10), $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$, en tenant compte des trois dernières équations et en remarquant qu'au point considéré la section plane est tangente à la ligne asymptotique, on trouve : d'abord les équations (2), (3) ci-dessus, puis

$$(4') \qquad d\frac{d\varphi}{dx}\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)+d\frac{d\varphi}{dy}\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)+d\frac{d\varphi}{dz}\left(\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right)+\frac{\Omega}{3\,ds^2}=0,$$

où $\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)$, etc., représentent les valeurs que prennent les dérivées secondes $\frac{d^2\xi}{d\sigma^2},\dots,$ pour $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$. D'ailleurs, on a évidemment aussi

$$(1') \qquad \frac{d\varphi}{dx}\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)+\frac{d\varphi}{dy}\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)+\frac{d\varphi}{dz}\left(\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right)=0,$$

$$(6') \qquad \frac{dx}{ds}\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)+\frac{dy}{ds}\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)+\frac{dz}{ds}\left(\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right)=0;$$

donc si l'on opère sur les équations (1'), (6') et (4') de la même manière que l'on a opéré ci-devant sur les équations (1), (6), (4), et qu'on désigne par ρ' le rayon de courbure de la ligne plane, au point et sur la branche que l'on considère, on trouvera évidemment

$$(8') \qquad \rho'=\pm\frac{3\Delta\,ds}{h\Omega},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\rho}{\rho'}=\frac{2}{3},$$

d'où résulte la propriété énoncée.

Les formules (8), (8') deviennent illusoires pour les surfaces développables, puisque $d\psi$ et Ω s'y annulent en même temps. Dans ces surfaces, les deux séries de lignes asymptotiques se réduisent à une seule : c'est le système des génératrices rectilignes, qui en sont en même temps des lignes de courbure. Le rayon ρ est donc en général infini. Cependant l'arête de rebroussement de la surface, ayant lui aussi ses normales dans le plan tangent à la surface, peut être regardé comme une ligne asymptotique *singulière*, dont le rayon de courbure n'est généralement ni nul ni infini. Le lieu des points communs à la surface développable et à un de ses plans tangents se compose évidemment de la génératrice de contact, qui joue le rôle d'une droite double, et d'une ligne courbe qui touche cette génératrice au même point que l'arête de rebroussement. On a donc, en ce point, une ligne asymptotique et une section plane tangente à la surface, dont les courbures ne peuvent pas être tirées des formules précédentes et qui doivent être déterminées directement.

Pour cet objet nous remarquerons d'abord que la courbe plane est, dans ce cas, le lieu du point d'intersection d'une tangente mobile de la ligne à double courbure, qui constitue l'arête de rebroussement de la surface développable, avec un des plans osculateurs de cette même ligne. Nous rapporterons donc l'arête de rebroussement aux trois axes des x, y, z formés respectivement par la tangente, la normale principale et l'axe du plan osculateur au point que l'on considère. D'après ce choix de coordonnées les points très-voisins de l'origine peuvent être représentés par les formules suivantes :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= s - \frac{s^3}{3\rho_0^2} + \ldots, \\ y &= \frac{s^2}{2\rho_0} + \left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}\right)_0 \frac{s^3}{6} + \ldots, \\ z &= \frac{s^3}{6 r_0 \rho_0} + \ldots \end{aligned}\right.$$

où s est l'arc compté de l'origine, dans le sens des x positives, ρ, r sont les rayons de première et deuxième courbure, et l'indice o marque ce qui se rapporte à l'origine. Ces formules s'obtiennent aisément en étendant aux lignes à double courbure le procédé exposé pour les courbes planes aux §§ 516, 517 de l'excellent *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand. La valeur de z résulte immédiatement aussi d'un théorème de M. Bonnet, démontré au § 608 du même ouvrage.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées courantes de la tangente à la ligne s, et par λ la portion de cette tangente comprise entre le point de contact (x, y, z) et le point (ξ, η, ζ) : on aura

$$\xi = x + \lambda \frac{dx}{ds}, \quad \eta = y + \lambda \frac{dy}{ds}, \quad \zeta = z + \lambda \frac{dz}{ds}.$$

Remplaçant x, y, z par leurs valeurs (11), posant $\zeta = 0$, tirant la valeur de λ et la substituant dans les expressions de ξ, η, on trouvera

$$\xi_0 = \frac{2s}{3} + \ldots, \quad \eta_0 = \frac{s^2}{6\rho_0} + \ldots,$$

ξ_0, η_0 étant les coordonnées du point d'intersection de la tangente avec le plan xy. On aura donc, pour l'arc σ de la courbe plane lieu des points (ξ_0, η_0),

$$\sigma = \frac{2s}{3} + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$\xi_0 = \sigma + \ldots, \quad \eta_0 = \frac{3\sigma^2}{8\rho_0} + \ldots.$$

Or, en nommant ρ' le rayon de courbure de cette dernière courbe et appliquant à celle-ci les formules (11), on aurait

$$\xi_0 = \sigma + \ldots, \quad \eta_0 = \frac{\sigma^2}{2\rho'_0} + \ldots.$$

La comparaison de ces valeurs avec les précédentes donne

$$\frac{\rho_0}{\rho'_0} = \frac{3}{4}.$$

[La démonstration précédente aurait été rendue plus rigoureuse par l'introduction d'un terme en s^4, à coefficient indéterminé, dans les formules (11). J'ai omis cette précaution dans le désir d'abréger.]

Ainsi, *la tangente mobile d'une ligne à double courbure décrit sur un quelconque de ses plans osculateurs une courbe plane qui touche cette ligne au point d'osculation; le rayon de courbure de la ligne à double courbure est toujours, en ce point, les trois quarts du rayon de courbure de la courbe plane au même point.*

On sait que M. Mœbius a démontré que la tangente mobile d'une cubique gauche décrit sur chacun de ses plans osculateurs une ligne du deuxième degré. D'après le théorème qui précède, on voit que la détermination du rayon de courbure d'une cubique gauche est ramenée à celle du rayon de courbure d'une section conique.

Je termine en exprimant le désir que mes théorèmes puissent être vérifiés par des considérations géométriques directes, ce qui ne pourra pas manquer d'avoir lieu, si quelqu'un des savants collaborateurs de ce journal veut bien s'en occuper.