Nouvelles annales de mathématiques

J.-N. Haton de La Goupillière

Équations tétraèdriques des surfaces du second ordre circonscrites aux sommets ou inscrites aux faces ou aux arêtes d'un tétraèdre quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 241-258

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__241_0>

ÉQUATIONS TÉTRAÉDRIQUES

des surfaces du second ordre circonscrites aux sommets ou inscrites aux faces ou aux arêtes d'un tétraèdre quelconque;

PAR M. J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

I. — SURFACES CIRCONSCRITES.

1. Si l'on désigne par

$$P=0,\quad Q=0,\quad R=0,\quad S=0$$

les équations des quatre faces d'un tétraèdre quelconque rapporté à des coordonnées obliques ou orthogonales, toute surface du second ordre (*) pourra être représentée par l'équation homogène (**)

$$(1)\quad A_1^2 PQ + A_3^4 RS + A_1^3 PR + A_2^4 QS + A_1^4 PS + A_2^3 QR \\ + B_1 P^2 + B_2 Q^2 + B_3 R^2 + B_4 S^2 = 0,$$

car celle-ci renferme neuf arbitraires, ce qui est le nombre de conditions distinctes que comporte ce genre de surfaces

Nous nous proposerons ici de déterminer les formes spéciales que prend cette équation lorsqu'on assujettit la surface à être circonscrite aux quatre sommets, inscrite

(*) Comme nous ne considérerons ici que ce genre de figures, nous nous contenterons de les distinguer sous le nom de *surfaces*.

(**) Dans le symbole A_1^2 on doit voir non un exposant, mais deux indices que j'introduis en vue de la symétrie des calculs. Ces indices sont d'ailleurs indépendants, et on peut écrire indifféremment A_1^2 ou A_2^1, ce qui peut être utile pour les permutations tournantes.

entre les quatre faces, ou inscrite entre les six arêtes du tétraèdre.

2. *Surfaces circonscrites.* — Pour que la surface passe par le sommet QRS, il faut que la formule (1) ne renferme aucun terme indépendant de ces trois quantités, c'est-à-dire que $B_1 = 0$. Les autres carrés devant disparaître pour la même raison, nous obtenons l'équation

$$(2)\quad A_1^2 PQ + A_3^4 RS + A_1^3 PR + A_2^4 QS + A_1^4 PS + A_2^3 QR = 0,$$

qui est la plus générale, car elle renferme cinq arbitraires, et la surface se trouve déjà assujettie à quatre conditions.

3. *Plan tangent.* — Les plans tangents aux quatre sommets sont représentés par les équations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1^2 Q + A_1^3 R + A_1^4 S = 0, \\ A_1^2 P + A_2^3 R + A_2^4 S = 0, \\ A_1^3 P + A_2^3 Q + A_3^4 S = 0, \\ A_1^4 P + A_2^4 Q + A_3^4 R = 0. \end{array}\right.$$

En effet, pour ce qui concerne le dernier, par exemple, il est évident d'abord qu'il passe par le sommet PQR. Si de plus on le coupe par la surface, comme son équation n'est autre que le coefficient de S dans la formule (2), celle-ci se réduit à un polynôme homogène en P, Q, R, et par suite aussi en P, Q seulement, puisque R se trouve lui-même exprimé d'une manière homogène en fonction de P et Q par l'équation (3). Or, une pareille expression revient toujours à la somme ou à la différence de deux carrés, et par suite l'intersection est formée de deux droites réelles ou imaginaires, ce qui est le caractère du plan tangent.

4. Les quatre plans (3) forment le tétraèdre polaire

conjugué du précédent par rapport à la surface (2). Si nous les désignons en abrégé par

$$(4) \qquad p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0,$$

l'équation de la surface prend la forme élégante

$$(5) \qquad \mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{R}r + \mathrm{S}s = 0.$$

II. — Surfaces inscrites aux faces.

5. Cette dernière formule représente une surface qui est à la fois circonscrite aux sommets du tétraèdre PQRS, et inscrite aux faces du tétraèdre $pqrs$. Pour retrouver sous une forme explicite en P, Q, R, S l'équation (2) des surfaces circonscrites, il suffirait d'y rendre à p, q, r, s leurs valeurs (3). Si au contraire nous substituons à P, Q, R, S leurs expressions en fonction de p, q, r, s tirées des mêmes équations (3), nous aurons sous une forme également explicite l'équation de la surface inscrite aux faces de $pqrs$.

Pour simplifier l'écriture nous poserons

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}^2_1\mathrm{A}^4_3 + \mathrm{A}^3_1\mathrm{A}^4_2 - \mathrm{A}^4_1\mathrm{A}^3_2 &= \mathrm{L}, \\ \mathrm{A}^2_1\mathrm{A}^4_3 - \mathrm{A}^3_1\mathrm{A}^4_2 + \mathrm{A}^4_1\mathrm{A}^3_2 &= \mathrm{M}, \\ -\mathrm{A}^2_1\mathrm{A}^4_3 + \mathrm{A}^3_1\mathrm{A}^4_2 + \mathrm{A}^4_1\mathrm{A}^3_2 &= \mathrm{N}. \end{aligned} \right.$$

Alors l'élimination fournit les valeurs

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P} &= 2p.\mathrm{A}^3_2\mathrm{A}^4_2\mathrm{A}^4_3 - \mathrm{A}^4_3\mathrm{N}.q - \mathrm{A}^4_2\mathrm{M}.r - \mathrm{A}^3_2\mathrm{L}.s, \\ \mathrm{Q} &= 2q.\mathrm{A}^3_1\mathrm{A}^4_1\mathrm{A}^4_3 - \mathrm{A}^4_1\mathrm{L}.r - \mathrm{A}^3_1\mathrm{M}\ s - \mathrm{A}^4_3\mathrm{N}.p, \\ \mathrm{R} &= 2r.\mathrm{A}^2_1\mathrm{A}^4_1\mathrm{A}^4_2 - \mathrm{A}^2_1\mathrm{N}.s - \mathrm{A}^4_2\mathrm{M}.p - \mathrm{A}^4_1\mathrm{L}.q, \\ \mathrm{S} &= 2s.\mathrm{A}^2_1\mathrm{A}^3_1\mathrm{A}^3_2 - \mathrm{A}^3_2\mathrm{L}.p - \mathrm{A}^3_1\mathrm{M}\ q - \mathrm{A}^2_1\mathrm{N}.r, \end{aligned} \right.$$

en omettant dans chacune d'elles le dénominateur commun, auquel il est inutile d'avoir égard puisque ces résultats sont destinés à être substitués dans une relation homogène.

16.

Si l'on effectue cette substitution, il vient

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &A_2^3 A_2^4 A_3^4 . p^2 + A_1^3 A_1^4 A_3^4 . q^2 + A_1^2 A_1^4 A_2^4 . r^2 + A_1^2 A_1^3 A_2^3 . s^2 \\ &\quad = (A_1^4 qr + A_2^3 sp) L + (A_1^3 qs + A_2^4 pr) M \\ &\qquad + (A_3^4 pq + A_1^2 rs) N; \end{aligned}\right.$$

ou, en rendant l'expression complétement explicite,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &A_2^3 A_2^4 A_3^4 . p^2 + A_1^3 A_1^4 A_3^4 . q^2 + A_1^2 A_1^4 A_2^4 . r^2 + A_1^2 A_1^3 A_2^3 . s^2 \\ &\quad - (A_1^2 A_3^4 + A_1^3 A_2^4 - A_1^4 A_2^3)(A_1^4 qr + A_2^3 sp) \\ &\quad - (A_1^2 A_3^4 - A_1^3 A_2^4 + A_1^4 A_2^3)(A_1^3 qs + A_2^4 pr) \\ &\quad - (- A_1^2 A_3^4 + A_1^3 A_2^4 + A_1^4 A_2^3)(A_3^4 pq + A_1^2 rs) = 0, \end{aligned}\right.$$

ce qui est bien l'équation la plus générale (*), car elle renferme cinq arbitraires, et la surface se trouve déjà astreinte à quatre conditions.

6. *Point de contact.* — Pour avoir le point de contact de la surface avec la face s, il suffit de faire dans l'équation (8) $s = 0$. Le résultat peut alors se mettre sous la forme

$$N\left(\frac{p}{A_1^4} - \frac{q}{A_2^4}\right)^2 + L\left(\frac{q}{A_2^4} - \frac{r}{A_3^4}\right)^2 + M\left(\frac{r}{A_3^4} - \frac{p}{A_1^4}\right)^2 = 0.$$

Si les trois quantités L, M, N (6) sont de même signe, il devient nécessaire d'annuler séparément les trois carrés, ce qui ne fournit que deux équations distinctes, c'est-à-

(*) Comme cette équation est compliquée, il ne sera pas inutile d'indiquer les formes suivantes, qui sont particulières mais plus simples :

$$\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2 + \delta^2 s^2 - \alpha\beta pq - \gamma\delta rs - \alpha\gamma pr - \beta\delta qs - \alpha\delta ps - \beta\gamma qr = 0,$$

$$\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2 + \delta^2 s^2 = \sqrt{2}(\alpha p + \beta q)(\gamma r + \delta s),$$

qui représentent des surfaces convexes d'après la remarque du n° 6.

dire une droite réelle, et par son intersection avec la face s, un point unique. Dans le cas contraire on aura en outre deux plans réels menés par cette droite et coupant la face s suivant deux génératrices. Ainsi donc la surface sera convexe ou réglée suivant que les trois trinômes L, M, N seront ou non de même signe.

Dans tous les cas les droites qui joignent chaque sommet au point de contact de la face opposée auront pour équations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{p}{A_1^4}=\frac{q}{A_2^4}=\frac{r}{A_3^4},\\ &\frac{q}{A_1^2}=\frac{r}{A_1^3}=\frac{s}{A_1^4},\\ &\frac{r}{A_2^3}=\frac{s}{A_2^4}=\frac{p}{A_1^2},\\ &\frac{s}{A_3^4}=\frac{p}{A_1^3}=\frac{q}{A_2^3}.\end{aligned}\right.$$

En adjoignant à ces quatre systèmes respectifs les relations (4), nous obtiendrons les sommets du tétraèdre polaire conjugué de $pqrs$ par rapport à la surface (9).

III. — Surfaces inscrites aux arêtes.

7. Pour que l'arête RS soit tangente à la surface, il faut que les trois termes qui ne renferment ni R ni S forment un carré parfait, car l'équation résultant des hypothèses $R=S=0$ représente alors un plan unique. On doit donc avoir

$$(A_1^2)^2=4B_1B_2,$$

ou, en désignant par C les racines des arbitraires B,

$$A_1^2=\pm 2C_1C_2.$$

On obtient ainsi l'équation (*)

$$(11)\quad \begin{cases} C_1^2P^2 + C_2^2Q^2 + C_3^2R^2 + C_4^2S^2 - 2C_1C_2PQ - 2C_3C_4RS \\ \quad - 2C_1C_3PR - 2C_2C_4QS - 2C_1C_4PS - 2C_2C_3QR = 0, \end{cases}$$

qui est la plus générale, puisqu'elle renferme trois arbitraires et que nous avons imposé à la surface six conditions.

8. *Point de contact.* — Le point de contact de l'arête RS avec la surface est alors déterminé par les équations

$$(12)\qquad R = 0,\quad S = 0,\quad (C_1P - C_2Q)^2 = 0,$$

dont la dernière représente le plan qui le réunit à l'arête opposée.

9. Si nous considérons à la fois les six plans qui joignent chaque arête au point de contact de l'arête opposée, ils seront représentés par le système

$$(13)\qquad \begin{cases} C_1P = C_2Q, \\ C_3R = C_4S, \\ C_1P = C_3R, \\ C_2Q = C_4S, \\ C_1P = C_4S, \\ C_2Q = C_3R. \end{cases}$$

(*) A la vérité, on doit au premier abord remplacer tous les signes négatifs par de doubles signes, mais une discussion que je supprime ici montre que l'on peut s'en tenir à la forme (11).

En effet, les six doubles signes fournissent outre cette équation $2^6 - 1 = 63$ combinaisons, dont 7 peuvent être rejetées comme *inutiles*, car elles dérivent de (11) par les changements de signes des quantités C_1, C_2, C_3, C_4; 8 autres comme *étrangères*, en ce qu'elles sont des carrés parfaits se rapportant à des plans uniques, et les 48 dernières comme représentant des cônes qui ont leur sommet sur l'une des arêtes. Ce sont là en

On voit que toutes ces formules rentrent dans les trois suivantes :

$$(14) \qquad C_1P = C_2Q = C_3R = C_4S,$$

d'où ce théorème :

Dans toute surface inscrite entre les arêtes d'un tétraèdre quelconque, les six plans menés par chaque arête et le point de contact de l'arête opposée se croisent au même point.

10. *Plan tangent.* — Le plan tangent au point de contact de l'arête RS (12) a pour équation

$$C_3R + C_4S = 0.$$

En effet, si nous introduisons cette hypothèse dans l'équation (11) de la surface, elle se réduit à la forme

$$(C_1P - C_2Q)^2 + 4C_3^2R^2 = 0,$$

qui est une somme absolue de deux carrés et oblige d'adjoindre à l'équation du plan, pour avoir son intersection avec la surface, deux nouvelles relations du premier degré qui déterminent un point unique.

Remarquons en passant, d'après cela, que *lorsqu'une surface est inscrite entre les arêtes d'un tétraèdre quelconque, elle est nécessairement convexe et jamais gauche.*

11. Si nous envisageons l'ensemble des six plans tangents suivant les couples d'arêtes opposées, nous formerons le tableau

$$(15)\begin{cases} C_1P + C_2Q = 0, \\ C_3R + C_4S = 0, \end{cases} \begin{cases} C_1P + C_3R = 0, \\ C_2Q + C_4S = 0, \end{cases} \begin{cases} C_1P + C_4S = 0, \\ C_2Q + C_3R = 0. \end{cases}$$

---

effet des solutions que la marche que nous avons suivie devait nous faire rencontrer, mais qui ne constituent pas le contact proprement dit d'une surface courbe avec les six arêtes.

On voit que chacun de ces systèmes satisfait identiquement l'équation

$$(16)\qquad C_1 P + C_2 Q + C_3 R + C_4 S = 0,$$

d'où ce théorème :

Dans toute surface inscrite entre les arêtes d'un tétraèdre quelconque, les trois intersections des couples de plans tangents suivant des arêtes opposées sont comprises dans un même plan.

12. *Tétraèdre polaire.*—Les plans polaires des quatre sommets du tétraèdre par rapport à la surface (11) ont pour équations :

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{r} C_1 P + C_2 Q + C_3 R - C_4 S = 0, \\ C_1 P + C_2 Q - C_3 R + C_4 S = 0, \\ C_1 P - C_2 Q + C_3 R + C_4 S = 0, \\ -C_1 P + C_2 Q + C_3 R + C_4 S = 0. \end{array}\right.$$

En effet, la dernière, par exemple, est identiquement satisfaite par le système (12) qui représente le point de contact de l'arête RS, et il en serait de même pour les deux autres arêtes QR, QS qui aboutissent au sommet QRS.

On peut vérifier d'après cela que les sommets du tétraèdre polaire fourni par les intersections de ces plans trois à trois auront pour équations :

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{rrrr} C_1 P = & C_2 Q = & C_3 R = & -C_4 S, \\ C_1 P = & C_2 Q = & -C_3 R = & C_4 S, \\ C_1 P = & -C_2 Q = & C_3 R = & C_4 S, \\ -C_1 P = & C_2 Q = & C_3 R = & C_4 S. \end{array}\right.$$

13. Si l'on réduit chacun de ces systèmes de trois équations à deux seulement en écartant les membres affectés de signes négatifs, on obtiendra les équations des droites qui joignent chaque sommet du tétraèdre proposé au pôle correspondant. On voit que toutes ces relations sont satisfaites par le système (14) ; d'où ce théorème :

Dans toute surface inscrite entre les arêtes d'un tétraèdre quelconque, les droites qui joignent chaque sommet au sommet correspondant du tétraèdre polaire se croisent en un même point qui est en même temps le point de concours des plans menés par chaque arête et le point de contact de l'arête opposée (*).

IV. — Surfaces concentriques.

14. *Coordonnées bimédianes.* — Les quatre polynômes que nous avons désignés par P, Q, R, S ne renferment au fond que trois variables distinctes x, y, z et par suite doivent avoir entre eux une relation qui est d'ailleurs nécessairement linéaire. La manière la plus simple de la formuler consiste à caractériser le tétraèdre par son centre de gravité P', Q', R', S'. Cette relation sera alors

$$(19) \qquad \frac{P}{P'} + \frac{Q}{Q'} + \frac{R}{R'} + \frac{S}{S'} = 4,$$

car si l'on annule Q, R, S, la quantité P représentera la valeur que prend ce polynôme au sommet de la médiane,

(*) On sait, d'après un théorème de M. Chasles, que lorsqu'il s'agit d'une surface et d'un tétraèdre quelconques, ces droites appartiennent en général à un même système de génératrices d'un certain hyperboloïde gauche. On voit par suite que dans le cas actuel cet hyperboloïde se réduit à un cône.

On sait également que les intersections des faces correspondantes des deux tétraèdres jouissent de la même propriété. Mais il ne saurait être question alors de réduire l'hyperboloïde à un cône, puisque les faces qui renferment ces droites passeraient elles-mêmes par un point unique et cesseraient d'appartenir à un tétraèdre.

valeur quatre fois plus grande que celle P′, qui est relative au centre de gravité situé au quart de cette médiane, puisque P s'annule à l'autre extrémité et varie proportionnellement à la distance.

Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées ont pour équations :

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{P}{P'}=\dfrac{Q}{Q'}, \\ \dfrac{R}{R'}=\dfrac{S}{S'}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{P}{P'}=\dfrac{R}{R'}, \\ \dfrac{Q}{Q'}=\dfrac{S}{S'}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{P}{P'}=\dfrac{S}{S'}, \\ \dfrac{Q}{Q'}=\dfrac{R}{R'}, \end{array}\right.$$

car la première, par exemple, passe par les milieux

$$\begin{array}{llll} P=0, & Q=0, & R=2R', & S=2S', \\ P=2P', & Q=2Q', & R=0, & S=0, \end{array}$$

des arêtes PQ et RS. Pour éviter une longue périphrase, j'appellerai ces droites les *bimédianes* du tétraèdre.

Les trois plans qui forment les bimédianes deux à deux ont pour équations :

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{P}{P'}+\dfrac{Q}{Q'}=\dfrac{R}{R'}+\dfrac{S}{S'}, \\ \dfrac{P}{P'}+\dfrac{R}{R'}=\dfrac{Q}{Q'}+\dfrac{S}{S'}, \\ \dfrac{P}{P'}+\dfrac{S}{S'}=\dfrac{Q}{Q'}+\dfrac{R}{R'}, \end{array}\right.$$

car la première, par exemple, se trouve satisfaite par chacun des deux derniers groupes (20).

Ces droites et ces plans constituent le système d'axes le plus simple auquel on puisse rapporter le tétraèdre. Nous les appellerons *coordonnées bimédianes*, et nous les désignerons par U, V, W. Ces lettres représenteront dès lors les expressions (21) réunies dans un seul membre.

15. *Surfaces concentriques au tétraèdre et ayant les*

bimédianes pour diamètres conjugués. — Il serait facile d'avoir l'équation générale des surfaces assujetties simplement à avoir leur centre au centre de gravité du tétraèdre. Mais, pour plus de simplicité dans les formules, j'imposerai en outre la condition que les bimédianes forment un système de diamètres conjugués.

L'équation peut alors s'écrire immédiatement sous la forme suivante, en fixant le terme constant en vue de la simplification des calculs,

$$(22)\qquad aU^2 + bV^2 + cW^2 = 16,$$

ou, en revenant aux coordonnées tétraédriques (21) et (19),

$$a\left(\frac{P}{P'}+\frac{Q}{Q'}-\frac{R}{R'}-\frac{S}{S'}\right)^2 + b\left(\frac{P}{P'}-\frac{Q}{Q'}+\frac{R}{R'}-\frac{S}{S'}\right)^2$$
$$+ c\left(\frac{P}{P'}-\frac{Q}{Q'}-\frac{R}{R'}+\frac{S}{S'}\right)^2 - \left(\frac{P}{P'}+\frac{Q}{Q'}+\frac{R}{R'}+\frac{S}{S'}\right)^2 = 0,$$

et en développant,

$$(a+b+c-1)\left[\left(\frac{P}{P'}\right)^2+\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2+\left(\frac{R}{R'}\right)^2+\left(\frac{S}{S'}\right)^2\right]$$
$$+2(\;a-b-c-1)\left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}\right)$$
$$+2(-a+b-c-1)\left(\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}\right)$$
$$+2(-a-b+c-1)\left(\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right) = 0,$$

ce qu'on peut écrire plus simplement

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{P}{P'}\right)^2+\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2+\left(\frac{R}{R'}\right)^2+\left(\frac{S}{S'}\right)^2+\alpha\left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}\right)\\&\qquad+\beta\left(\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}\right)+\gamma\left(\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation est la plus générale, car elle renferme trois arbitraires, et la surface a été assujettie à six conditions.

16. *Surfaces concentriques au tétraèdre et ayant les bimédianes pour diamètres conjugués* ÉGAUX. — Imposons-nous de plus la condition que les bimédianes forment des diamètres conjugués *égaux* et supposons-les d'abord réels, c'est-à-dire la surface ellipsoïdale. Nous devrons poser $a = b = c$, et par suite $\alpha = \beta = \gamma$, ce qui donne (*)

$$(24)\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{P}{P'}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 + \left(\frac{R}{R'}\right)^2 + \left(\frac{S}{S'}\right)^2 \\ &+ \varpi\left(\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{RS}{R'S'} + \frac{PR}{P'R'} + \frac{QS}{Q'S'} + \frac{PS}{P'S'} + \frac{QR}{Q'R'}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

équation la plus générale puisqu'elle renferme encore un paramètre. Elle fournit une famille bien déterminée d'ellipsoïdes qui sont évidemment homothétiques.

17. On peut démontrer à cet égard le théorème suivant : *Si un ellipsoïde a pour diamètres conjugués égaux les bimédianes d'un tétraèdre, il coupe ses faces suivant des ellipses qui ont pour centres les centres de gravité de ces faces.*

On aura en effet, en coupant la surface (24) par le

(*) Les paramètres sont alors reliés par la formule

$$\varpi = \frac{2(a-b-c-1)}{a+b+c-1} = -\frac{2(a+1)}{3a-1},$$

$$a = \frac{\varpi - 2}{3\varpi + 2},$$

dont nous aurons besoin plus loin.

plan $S = o$,

$$\left(\frac{P}{P'}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 + \left(\frac{R}{R'}\right)^2 + \varpi\left(\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{PR}{P'R'} + \frac{QR}{Q'R'}\right) = o.$$

Or les équations dérivées relatives à P et Q, en considérant R comme leur fonction d'après l'équation (19) où l'on a fait $S = o$, se réduisent à

$$\frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'},$$

qui sont les équations de la médiane du sommet opposé à la face S, aboutissant par conséquent au centre de gravité de cette face.

18. Pour obtenir en second lieu les hyperboloïdes qui ont les bimédianes pour diamètres conjugués égaux, on peut faire les trois hypothèses :

$$-a = b = c, \quad a = -b = c, \quad a = b = -c,$$

d'où

$$\beta = \gamma = 2, \qquad \alpha = \gamma = 2, \qquad \alpha = \beta = 2,$$

ce qui fournit les trois équations :

$$(25)\ \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{P}{P'}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 + \left(\frac{R}{R'}\right)^2 + \left(\frac{S}{S'}\right)\\
&+2\left(\frac{PR}{P'R'} + \frac{QS}{Q'S'} + \frac{PS}{P'S'} + \frac{QR}{Q'R'}\right) + \varphi\left(\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{RS}{R'S'}\right) = o,\\
&\left(\frac{P}{P'}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 + \left(\frac{R}{R'}\right)^2 + \left(\frac{S}{S'}\right)\\
&+2\left(\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{RS}{R'S'} + \frac{PS}{P'S'} + \frac{QR}{Q'R'}\right) + \psi\left(\frac{PR}{P'R'} + \frac{QS}{Q'S'}\right) = o,\\
&\left(\frac{P}{P'}\right) + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 + \left(\frac{R}{R'}\right)^2 + \left(\frac{S}{S'}\right)^2\\
&+2\left(\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{RS}{R'S'} + \frac{PR}{P'R'} + \frac{QS}{Q'S'}\right) + \chi\left(\frac{PS}{P'S'} + \frac{QR}{Q'R'}\right) = o.
\end{aligned}\right.$$

On constatera de même à l'aide de ces équations que *si un hyperboloïde a pour diamètres conjugués égaux les bimédianes d'un tétraèdre, il coupe ses faces suivant des hyperboles qui ont pour centres les sommets du tétraèdre et pour asymptotes les côtés de l'un des trois quadrilatères gauches que forment les arêtes.*

19. *Surfaces circonscrites et inscrites aux faces et aux arêtes qui ont les bimédianes pour diamètres conjugués.* — Reprenons l'équation (23) et cherchons à la faire coïncider avec le type (2) des surfaces circonscrites. Celle-ci ne renfermant pas de carrés, il faut remplacer α, β, γ par $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\varepsilon}$, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$, chasser ε, puis faire $\varepsilon = 0$. Il vient ainsi

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha\left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}\right)+\beta\left(\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}\right)\\ &\qquad+\gamma\left(\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation renferme encore deux arbitraires, et cependant nous avons imposé en tout dix conditions à la surface. Cela tient à ce que, *lorsqu'une surface est circonscrite à un tétraèdre et qu'elle a son centre au centre de gravité, elle a par cela même les bimédianes pour diamètres conjugués.*

20. En cherchant de même à faire coïncider la forme (23) avec celle (9) des surfaces inscrites aux faces, on est amené à poser

$$A_1^4 = A_2^3 = \lambda,$$
$$A_2^4 = A_1^3 = \mu,$$
$$A_3^4 = A_1^2 = \nu,$$

ce qui fournit l'équation

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda\mu\nu\left[\left(\frac{p}{p'}\right)^2+\left(\frac{q}{q'}\right)^2+\left(\frac{r}{r'}\right)^2+\left(\frac{s}{s'}\right)^2\right]\\ &+\lambda(\lambda^2-\mu^2-\nu^2)\left(\frac{pq}{p'q'}+\frac{rs}{r's'}\right)\\ &+\mu(-\lambda^2+\mu^2-\nu^2)\left(\frac{pr}{p'r'}+\frac{qs}{q's'}\right)\\ &+\nu(-\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\left(\frac{ps}{p's'}+\frac{qr}{q'r'}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation renferme encore deux arbitraires, quoique la surface ait été astreinte à dix conditions, ce qui tient à ce que, *lorsqu'une surface est inscrite entre les faces d'un tétraèdre et qu'elle a son centre au centre de gravité, elle a par cela même les bimédianes pour diamètres conjugués.*

21. Pour faire coïncider enfin le type (23) avec celui (11) des surfaces inscrites entre les arêtes, il faut faire $\alpha=\beta=\gamma=-2$:

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{P}{P'}\right)^2+\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2+\left(\frac{R}{R'}\right)^2+\left(\frac{S}{S'}\right)^2\\ &-2\left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}+\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}+\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

On remarquera que nous avons par le fait imposé à la surface douze conditions, ce qui tient à ce que, *lorsqu'une surface est inscrite entre les arêtes d'un tétraèdre et qu'elle a son centre au centre de gravité, elle a par cela même les bimédianes pour diamètres conjugués.*

On voit que cette surface est unique et bien déterminée, et que de plus elle rentre dans le type (24), ce qui permet d'ajouter que *cette surface est un ellipsoïde qui* *coupe les faces suivant des ellipses ayant pour centres les centres de gravité de ces faces.*

22. *Surfaces circonscrites ou inscrites aux faces ou aux arêtes, ayant les bimédianes pour diamètres conjugués* ÉGAUX. — Occupons-nous d'abord des ellipsoïdes (24). Pour faire concorder ce type avec celui (2) des surfaces circonscrites, il faut opérer comme ci-dessus (19), ce qui donne

$$(29)\quad \left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}+\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}+\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0.$$

Pour la surface inscrite aux faces (9), il faut faire $\lambda=\mu=\nu$, d'où

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{P}{P'}\right)^2+\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2+\left(\frac{R}{R'}\right)^2+\left(\frac{S}{S'}\right)^2\\ &-\left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}+\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}+\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Quant à la surface inscrite aux arêtes, nous venons de l'obtenir à l'instant même (28) :

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{P}{P'}\right)^2+\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2+\left(\frac{R}{R'}\right)^2+\left(\frac{S}{S'}\right)^2\\ &-2\left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}+\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}+\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

23. Ces trois ellipsoïdes forment une série qui mérite d'être remarquée. Ils sont, comme nous l'avons dit, homothétiques et se distinguent par le rapport de similitude. Les dimensions seront pour chacun proportionnelles à [(22) et 16, note]

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{3\varpi+2}{\varpi-2}}.$$

Comme d'ailleurs ϖ prend les valeurs

$$\infty, \quad -2, \quad -1,$$

ces rapports deviennent

$$\sqrt{3}, \quad 1, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi donc *les axes des trois ellipsoïdes circonscrit, inscrit aux arêtes, et inscrit aux faces d'un tétraèdre, qui ont en outre les bimédianes pour diamètres conjugués égaux, forment une progression géométrique qui a pour raison* $\sqrt{3}$.

24. Si nous considérons maintenant les hyperboloïdes (25), nous devrons, pour les faire coïncider avec l'équation des surfaces circonscrites (2), qui ne renferme pas de carrés, remplacer φ, ψ, χ par $\frac{\varphi}{\rho}$, $\frac{\psi}{\rho}$, $\frac{\chi}{\rho}$, chasser ρ et faire $\rho = 0$, ce qui donne

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{RS}{R'S'} = 0, \\ &\frac{PR}{P'R'} + \frac{QS}{Q'S'} = 0, \\ &\frac{PS}{P'S'} + \frac{QR}{Q'R'} = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations montrent qu'*il existe trois hyperboloïdes circonscrits à un tétraèdre et ayant les bimédianes pour diamètres conjugués égaux, qui passent par chacun des trois quadrilatères gauches du tétraèdre et qui par suite sont toujours à une nappe.*

Pour les surfaces inscrites aux faces, nous obtiendrons précisément les mêmes résultats, puisque chaque face coupant l'hyperboloïde suivant deux génératrices lui est nécessairement tangente au sommet du quadrilatère gauche.

Quant aux surfaces inscrites entre les arêtes, nous avons vu qu'elles ne comportent qu'une solution unique (28) qui est ellipsoïdale, et d'ailleurs la forme de l'équation des hyperboloïdes (25) est incompatible avec le type général (11).