Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 225-232

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__225_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 378

(voir tome XVI, page 180);

PAR M. A. GRASSAT,
Elève du lycée de Lyon.

Deux droites fixes A *et* A′ *et deux points fixes* o *et* o′ *sont donnés dans un même plan. Une molécule* M *parcourt la première droite avec un mouvement représenté par l'équation*

$$e = a + bt;$$

et une molécule M′ *parcourt la deuxième droite* A′ *avec un mouvement représenté par l'équation*

$$e = a' + b't.$$

e désigne l'espace, t le temps, et a, b, a′, b′ sont des constantes données. S *et* S′ *étant deux positions simultanées des deux molécules, on demande :* 1° *de trouver l'équation du lieu géométrique de l'intersection des deux droites* oS, o′S′; 2° *l'équation de l'enveloppe de la droite* SS′; 3° *de démontrer qu'il existe une relation homographique entre les points* S *et* S′.

1° Je prends pour axes de coordonnées les deux droites A et A′. Soient α, β; α', β' les coordonnées des deux points fixes o, o'; k et k' les distances des positions initiales des deux mobiles à l'origine, les coordonnées des positions simultanées S, S′ seront

$$bt - k \text{ et } 0; \quad 0 \text{ et } b't - k'.$$

Donc les deux droites oS, $o'S'$ auront pour équation

$$y = \frac{\beta}{\alpha + k - bt}(x + k - bt),$$

$$y - b't + k' = \frac{\beta' + k' - b't}{\alpha'}x.$$

On obtiendra le lieu demandé en éliminant t entre ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{\beta(x+k) - y(\alpha + k)}{b(\beta - y)} = \frac{\alpha'(y + k') - x(\beta' + k')}{b'(\alpha' - x)}$$

ou

$$b'(x - \alpha')[k(y - \beta) + \alpha y - \beta x]$$
$$= b(y - \beta)[k'(x - \alpha') + \beta' x - \alpha' y].$$

Le lieu est donc une conique passant par les points o et o'.

2° L'équation de SS' étant

$$x(b't - k') + y(bt - k) = (bt - k)(b't - k'),$$

la dérivée par rapport à t donne

$$t = \frac{b'x + by + bk' + kb'}{2bb'}.$$

Substituant dans l'équation première, on a pour enveloppe la courbe représentée par

$$\frac{b'x}{b'x + by + bk' - kb'} + \frac{by}{b'x + by - bk' + kb'} = \frac{1}{2bb'}$$

ou

$$(b'x + by)^2 + (kb' - bk')(b'x - by)$$
$$= \frac{(b'x + by)^2 - (bk' - kb')^2}{2},$$

$$(b'x + by)^2 + 2(kb' - bk')(b'x - by) + (bk' - kb')^2 = 0.$$

C'est donc une conique tangente aux deux droites fixes, car en y faisant $x = 0$ par exemple, on obtient

$$b^2y^2 - 2by(kb' - bk') + (bk' - bk')^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(by - kb' + kb')^2 = 0.$$

Il en serait de même si on faisait $y = 0$.

3° On peut obtenir ces résultats autrement. Je considère quatre positions simultanées des deux molécules, S, S_1, S_2, S_3, S', S'_1, S'_2, S'_3 : le rapport anharmonique des quatre positions de la première sera

$$r = \frac{SS_1}{S_2S_1} : \frac{SS_3}{S_2S_3} = \frac{b(t' - t)}{b(t'' - t')} : \frac{b(t''' - t)}{b(t''' - t'')}$$
$$= \frac{(t' - t)(t''' - t'')}{(t'' - t')(t''' - t)};$$

pour la deuxième, ce rapport anharmonique sera

$$r' = \frac{b'(t' - t)}{b'(t'' - t')} : \frac{b'(t''' - t)}{b(t''' - t'')} = \frac{(t' - t)(t''' - t'')}{(t'' - t')(t''' - t)} = r.$$

Donc les positions simultanées des deux mobiles forment sur les deux droites des divisions homographiques; donc les faisceaux de droites oS, o'S' sont homographiques; donc, d'après un théorème connu, le lieu de leur intersection M est une conique passant par les deux points o et o', et la droite SS' qui joint deux positions simultanées enveloppe une conique tangente aux deux droites fixes A et A'. C. Q. F. D.

Note. — La dernière partie de l'énoncé est une conséquence immédiate du principe de correspondance anharmonique de M. Chasles (voir *Comptes rendus*, t. XLI, p. 1097). D'ailleurs les segments décrits sur les droites A et A' par les points S et S' sont proportionnels. P.

Question 379

(voir tome XVI, page 180);

PAR M. A. GRASSAT.

Mêmes données géométriques; le mouvement du point M *est donné par l'équation*

$$e = at,$$

celui du point M' *par*

$$et = a'.$$

On demande de trouver : 1° *l'équation du lieu géométrique de l'intersection des droites* oS, o'S'; 2° *l'équation de l'enveloppe de la droite* SS'; 3° *de démontrer qu'il existe entre les points* S, S' *une relation d'involution.*

1° Je prends encore pour axes les deux droites données. Soient α, β; α', β' les coordonnées des points o et o'; k et k' les distances à l'origine de deux positions initiales. Les coordonnées des points S et S' seront

$$at - k,\ 0 \quad \text{et} \quad 0,\ \frac{a'}{t} - k';$$

donc oS, o'S' auront pour équations

$$y - \beta = \frac{\beta}{\alpha + k - at}(x - \alpha),$$

$$y - \beta' = \frac{\beta' + k' - \dfrac{a'}{t}}{\alpha'}(x - \alpha').$$

L'élimination de t entre ces deux équations donne

$$\frac{\beta(x - \alpha) - (y - \beta)(\alpha + k)}{a(y - \beta)} = \frac{a'(x - \alpha')}{\alpha'(y - \beta') - (x - \alpha')(\beta' + k')},$$

ou

$$aa'(x - \alpha')(y - \beta)$$
$$= [\beta x - \alpha y - k(y - \beta)][\alpha' y - \beta' x - k'(x - \alpha')].$$

Le lieu est donc encore une conique passant par les deux points o et o'.

Si les deux droites données avaient été parallèles, on aurait pris pour axes la droite qui joint les positions initiales et la parallèle à ces droites menée par le milieu de la distance des deux positions initiales; on serait arrivé au même résultat.

2° L'équation de SS' étant

$$x(a'-k't)+ty(at-k)=(at-k)(a'-k't),$$

la dérivée, par rapport à t, égalée à o, donne

$$t=\frac{k'x+ky+aa'+kk'}{2a(y+k')}.$$

L'équation en t peut s'écrire

$$at^2(y+k')-t(k'x+ky+aa'+kk')+a'(x+k)=0;$$

substituant t, on a

$$\begin{gathered}a(y+k')(k'x+ky+aa'+kk')^2-2a(y+k')\\ \times(k'x+ky+aa'+kk')^2+a'(x+k)4a^2(y+k')^2=0,\end{gathered}$$

ce qui se décompose en

$$y+k'=0$$

et

$$(k'x+ky+aa'+kk')^2-4aa'(x+k)(y+k')=0.$$

L'enveloppe cherchée est donc une conique tangente aux deux droites

$$\begin{aligned}x+k&=0,\\ y+k'&=0\end{aligned}$$

aux points où elles sont rencontrées par la droite

$$k'x+ky+aa'+kk'=0.$$

Elle est aussi tangente aux deux axes, car en faisant

$x = 0$ on obtient

$$k^2y^2 + 2ky(aa' + kk') - 4kaa'(y + k') + (aa' + kk')^2 = 0$$

ou

$$(ky + kk' - aa')^2 = 0;$$

de même, si on faisait $y = 0$.

Même remarque que précédemment si les droites étaient parallèles.

3° Si je considère quatre positions simultanées des deux molécules, $S, S_1, S_2, S_3, S', S'_1, S'_2, S'_3$, le rapport anharmonique des quatre positions de la première sera

$$r = \frac{SS_2}{S_2S_1} : \frac{S_2S_3}{SS_3} = \frac{a(t'-t)}{a(t''-t')} : \frac{a(t'''-t)}{a(t'''-t'')} = \frac{(t'-t)(t'''-t'')}{(t''-t')(t'''-t)};$$

celui des quatre positions de la deuxième est

$$r' = \frac{a'\left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{t}\right)}{a'\left(\frac{1}{t''} - \frac{1}{t'}\right)} : \frac{a'\left(\frac{1}{t'''} - \frac{1}{t}\right)}{a'\left(\frac{1}{t'''} - \frac{1}{t''}\right)} = \frac{(t'-t)(t'''-t'')}{(t''-t')(t'''-t)} = r.$$

Donc les positions simultanées des deux mobiles forment sur les deux droites des divisions homographiques; donc les faisceaux de droites oS, $o'S'$ sont homographiques; donc leur intersection M décrit une conique passant par o et o', et la droite SS' enveloppe une conique tangente aux deux droites fixes données (*). C. Q. F. D.

(*) Qu'est-ce qu'une relation d'involution entre deux séries de points non situés sur la même droite, dont parle la troisième partie de l'énoncé? Nous avouons n'en rien savoir. M. Grassat se contente de démontrer que les deux séries de points sont homographiques : ce qui résulte d'ailleurs du principe de correspondance anharmonique. P.

Question 716

(voir 2ᵉ série, t. III, p. 445);

PAR M. LACAUCHIE,
Élève de Sainte-Barbe.

Quatre cercles OA′C′B′, OAB′C, OBCA′, OAC′B *passent par un même point* O. *Prouver que les points de concours des cordes* OA′, BC; OB′, AC; OC′, AB *sont en ligne droite; ou encore* OA, B′C; OB, A′C; OC′, A′B′; *etc.* (MENTION.)

Soient α, β, γ les points de concours des cordes OA′, BC; OB′, AC; OC′, AB. Les points B, C, A′, O étant sur une même circonférence, on a la relation

$$\alpha B . \alpha C = \alpha O . \alpha A'.$$

Donc α est un point de l'axe radical du cercle OA′C′B′ et du cercle circonscrit au triangle ABC. On prouverait de même que β et γ sont des points du même axe radical. La proposition est donc démontrée.

Note du Rédacteur. — M. L. Cousin, représentant par $C = 0$, $C' = 0$, etc., les équations des quatre cercles, trouve pour les équations des droites OA′, OB′, etc., les équations $C - C'' = 0$, $C - C' = 0$, etc., et parvient facilement à la démonstration du théorème. M. Fontaneau démontre la proposition en s'appuyant sur un théorème qui lui appartient et que nous ferons connaître prochainement.

Même question;

PAR M. BARRÈRE,
Élève du lycée de Nîmes.

On sait que les circonférences circonscrites aux quatre triangles d'un quadrilatère complet se coupent en un point O. Si je prends ce point pour pôle de transformation, la figure réciproque du système des droites (1), (2), (3), (4) sera un système de quatre circonférences passant par un même point, savoir :

$$OA'C'B', \quad OAB'C, \quad OBCA', \quad OAC'B.$$

Le point de concours α de OA′ et de BC deviendra, dans la figure réciproque, un point α' situé sur la circonférence passant par les points d'intersection des droites (2) et (3), (3) et (4), car BC passant par les points d'intersection des cercles OAB′C et OBCA′, OAC′B et OBCA′, la circonférence qui est sa figure réciproque doit passer par les points d'intersection des droites réciproques de ces cercles.

De même, β, point de concours de OB′ et de AC, deviendra, dans la figure réciproque, un point β' situé sur la circonférence passant par les points d'intersection des droites (2) et (3), (2) et (4), c'est-à-dire sur la même circonférence que précédemment. De même pour l'autre point de concours de OC′ et de AB; donc les trois points α, β, γ sont en ligne droite, puisque leurs réciproques sont sur une même circonférence passant par le pôle de transformation (*).

CORRESPONDANCE