NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. REALIS

Sur une classe d'équations résolues par Moivre et leurs dérivées

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 209-220
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__209_1>

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS RÉSOLUES PAR MOIVRE ET LEURS DÉRIVÉES;

PAR M. S. REALIS.

1. Soit l'équation

$$(1) \qquad y^{2n} + qy^n + p^n = 0,$$

dont les $2n$ racines sont comprises dans l'expression

$$y = \alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}},$$

où l'on doit donner à α, successivement, les n valeurs qui vérifient l'équation binôme

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

On supposera constamment, dans ce qui va suivre, que le nombre désigné par p est positif. Dans cette hypothèse, l'équation (1) demeure la même lorsqu'on y change y en $\frac{p}{y}$; d'où il suit qu'elle admet n diviseurs du second degré exprimés par la formule

$$y^2 - xy + p,$$

dans laquelle on attribuera à x les n valeurs de la fonction $y + \frac{p}{y}$.

D'après cela, divisons l'équation par y^n, ce qui la met sous la forme

$$y^n + q + \frac{p^n}{y^n} = 0,$$

et faisons

$$y + \frac{p}{y} = x.$$

On aura

$$y^n + \frac{p^n}{y^n} = x^n - npx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2} p^2 x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3} p^3 x^{n-6}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4} p^4 x^{n-8} - \ldots \mp 2p^{\frac{n}{2}},$$

ou bien

$$y^n + \frac{p^n}{y^n} = x^n - npx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2} p^2 x^{n-4} - \ldots \mp np^{\frac{n-1}{2}} x,$$

selon que n sera un nombre pair ou impair. Pour abréger, on représentera par $P_{2h} p^h x^{n-2h}$ un terme intermédiaire quelconque du développement qu'on vient d'écrire, laissant toutefois en évidence le deuxième terme où $P_2 = -n$. La loi de formation des coefficients P est connue, et je ne m'y arrêterai pas (*voir* l'*Algèbre supérieure* de M. Serret, 2e édit., p. 194 et 441).

Au moyen de ce développement, l'équation (1) divisée par y sera transformée dans la suivante :

$$(2)\quad x^n - npx^{n-2} + P_4 p^2 x^{n-4} + \ldots + P_{2h} p^h x^{n-2h} + \ldots + q = 0;$$

et les n racines de celle-ci seront comprises, d'après la relation entre x et y, dans l'expression

$$x = \alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}} + \frac{p}{\alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}}},$$

ou bien dans l'expression équivalente

$$x = \alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}} + \alpha^{n-1} \sqrt[n]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}},$$

α étant racine de l'équation

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

Les équations de la forme (2), dont la résolution est réduite par ce qui précède au dernier degré de simplicité, rentrent dans celles que Moivre avait résolues dans les *Transactions philosophiques* pour l'année 1707. Ces équations ont été ensuite traitées par Euler, qui a vérifié *à posteriori* les solutions que Moivre avait données sans démonstration, et les a complétées par l'introduction des racines de l'unité (*voir* le tome VI des anciens Commentaires de Pétersbourg : *De formis radicum æquationum*; ou bien le *Complément des Éléments d'Algèbre* de Lacroix, 6[e] édit., p. 147).

On reconnaît aisément, d'après les formules ci-dessus, que selon que l'on aura

$$\frac{q^2}{4} - p^n < 0, \quad \text{ou} \quad \frac{q^2}{4} - p^n > 0,$$

l'équation (2) aura toutes ses racines réelles, ou toutes imaginaires (à l'exception de celle qui correspond à $\alpha = 1$, quand n est impair, et de celles qui correspondent à $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$, quand n est pair et q négatif).

Dans le cas spécial de

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

l'équation a toutes ses racines réelles et égales deux à deux (avec une distincte, quand n est impair; et deux ne différant que par le signe, quand n est pair et q négatif)

Ce cas mérite une attention particulière, à cause des circonstances qu'il présente, et des conséquences qu'on en déduit relativement aux racines de l'équation et à celles de sa dérivée. C'est ce que je me propose de développer.

Remarque. — L'équation

$$y^6 + qy^3 + p^3 = 0,$$

traitée comme il vient d'être dit, conduit sur-le-champ à la résolution et à la discussion complète de l'équation générale du troisième degré

$$x^3 - 3px + q = 0,$$

au moyen de la formule

$$x = \alpha \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}} + \alpha^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}},$$

où α doit recevoir, successivement, les trois valeurs de la racine cubique de l'unité.

Dans le cas particulier où $\frac{q^2}{4} - p^3 = 0$, les trois valeurs de x sont

$$x_1 = (\alpha + \alpha^2) \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = x_2,$$

$$x_3 = 2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

ou bien, mettant le signe négatif hors du radical, et faisant attention que les racines cubiques imaginaires α et α^2 donnent $\alpha + \alpha^2 = -1$,

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = x_2; \quad x_3 = -2 \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

On a en effet

$$x^3 - 3x \sqrt[3]{\frac{q^2}{4}} + q = \left(x + 2 \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)\left(x - \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^3 - 3px + 2p\sqrt{p} = (x + 2\sqrt{p})(x - \sqrt{p})^2,$$

le radical $\sqrt{p}$ devant être pris avec le signe de q.

2. Rappelons ici que si n est un nombre premier et que α soit une racine imaginaire quelconque de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$, les n racines de cette équation sont représentées par

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n,$$

et que si n est un nombre composé, il existe telle racine α (et même plusieurs racines) qui jouit également de la propriété de reproduire toutes les autres par ses diverses puissances successives. Les racines ayant cette propriété sont désignées sous le nom de *racines primitives* ou *racines absolues* de l'équation binôme $\alpha^n - 1 = 0$. On peut voir, pour ce qui les concerne, la Note XIII de l'ouvrage de Lagrange sur les équations numériques, ou la XIII^e leçon de l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.

Maintenant, reprenons l'équation (2), et considérons séparément les cas du degré impair et du degré pair.

Soit d'abord n impair, et posons

$$f(x) = x^n - npx^{n-2} + \ldots + \mathrm{P}_{2h}p^h x^{n-2h} + \ldots \mp np^{\frac{n-1}{2}} x + q.$$

Prenant pour α une racine absolue quelconque de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$, les n racines de $f(x) = 0$ seront fournies par la formule

$$(3) \quad x_k = \alpha^k \sqrt[n]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}} + \alpha^{n-k} \sqrt[n]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}},$$

où l'on donnera à k les valeurs successives $1, 2, 3, \ldots, n$.

Le cas qu'il importe d'examiner est celui où $\frac{q^2}{4} - p^n = 0$. Alors les valeurs de x se partagent par groupes de racines doubles, au nombre de $\frac{n-1}{2}$, de la manière suivante :

$$x_1 = (\alpha + \alpha^{n-1})\sqrt[n]{-\frac{q}{2}} = x_{n-1},$$

$$x_2 = (\alpha^2 + \alpha^{n-2})\sqrt[n]{-\frac{q}{2}} = x_{n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$x_{\frac{n-1}{2}} = \left(\alpha^{\frac{n-1}{2}} + \alpha^{\frac{n+1}{2}}\right)\sqrt[n]{-\frac{q}{2}} = x_{\frac{n+1}{2}},$$

tandis que la racine isolée, c'est-à-dire celle qui répond à la valeur réelle $\alpha^n = 1$, sera

$$x_n = 2\sqrt[n]{-\frac{q}{2}}.$$

Et comme les couples α, α^{n-1}; α^2, α^{n-2}; ... ; $\alpha^{\frac{n-1}{2}}$, $\alpha^{\frac{n+1}{2}}$ se composent tous d'expressions imaginaires conjuguées et réciproques deux à deux et donnant des sommes réelles, les couples des valeurs égales de x seront réels, comme on l'a annoncé plus haut.

On aura donc

$$f(x) = \left(x - 2\sqrt[n]{-\frac{q}{2}}\right)\left(x - \beta_1\sqrt[n]{-\frac{q}{2}}\right)^2$$
$$\times\left(x - \beta_2\sqrt[n]{-\frac{q}{2}}\right)^2 \cdots \left(x - \beta_{\frac{n-1}{2}}\sqrt[n]{-\frac{q}{2}}\right)^2,$$
$$= (x + 2\sqrt{p})(x + \beta_1\sqrt{p})^2(x + \beta_2\sqrt{p})^2 \dots$$
$$\times\left(x + \beta_{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p}\right)^2,$$

en ayant soin de prendre $\sqrt{p}$ avec le signe de q; β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_{\frac{n-1}{2}}$ désignent les $\frac{n-1}{2}$ valeurs (toutes réelles) que prend la fonction

$$\beta_k = \alpha^k + \frac{1}{\alpha^k},$$

en y faisant successivement $k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, après y avoir mis pour α une racine absolue quelconque de l'équation

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

Ces valeurs de β se déduisent l'une de l'autre au moyen des relations connues

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \beta_1^2 - 2, \\ \beta_3 &= \beta_1^3 - 3\beta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_k &= \beta_1^k - k\beta_1^{k-2} + \frac{k(k-3)}{2}\beta_1^{k-4} - \ldots, \end{aligned}$$

et ne sont autre chose que les différentes racines de l'équation qu'on obtient en posant

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \beta$$

dans l'équation

$$\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = 0,$$

d'après la méthode ordinaire d'abaissement des équations réciproques. On peut voir, relativement à la formation à l'équation en β, l'*Algèbre supérieure* déjà citée, p. 186 et 197.

Cela posé, considérons la dérivée de $f(x)$, et rappelons-nous que l'équation

$$f'(x) = 0$$

doit avoir les racines $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\frac{n-1}{2}}$ en commun avec $f(x) = 0$. Nous aurons

$$f'(x) = n(x + \beta_1\sqrt{p})(x + \beta_2\sqrt{p})\ldots\left(x + \beta_{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p}\right)X,$$

X désignant un polynôme du degré $\frac{n-1}{2}$ qu'il s'agit de déterminer.

Cette dérivée, dont le degré est $n-1$, ne contiendra pas de terme de degré impair par rapport à x, en sorte que ses racines seront égales deux à deux et de signes contraires. C'est-à-dire que si l'on désigne par a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_{n-1}$ les racines (toutes réelles) de $f'(x) = 0$ rangées par ordre de grandeur algébrique croissante, on aura

$$a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \ldots = a_{\frac{n-1}{2}} + a_{\frac{n+1}{2}} = 0.$$

Substituons ces quantités à la place de x dans $f(x)$, et supposons d'abord que q soit positif; nous aurons, à cause des racines communes entre $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$,

$$f(a_2) = f(a_4) = f(a_6) = \ldots = f(a_{n-1}) = 0.$$

Si q était négatif, ce qui ne changerait rien à la dérivée, on aurait

$$f(a_1) = f(a_3) = f(a_5) = \ldots = f(a_{n-2}) = 0.$$

Or, il est clair que si q est positif, on passe au cas de q négatif en retranchant de $f(x)$ la quantité $2q$, et si q est négatif, on passe au cas de q positif en ajoutant le double de la valeur absolue de q à $f(x)$; d'où il suit que, pour $q > 0$, on aura simultanément

$$\left\{\begin{aligned} f(a_{2h+1}) &= 2q, \\ f(a_{2k}) &= 0, \end{aligned}\right.$$

et, pour $q < 0$, on aura

$$\left\{\begin{aligned} f(a_{2h+1}) &= 0, \\ f(a_{2k}) &= 2q. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, a_{2h+1} désigne une quelconque des racines de rang impair $a_1, a_3, \ldots, a_{n-2}$, et a_{2k} une quelconque des racines de rang pair $a_2, a_4, \ldots, a_{n-1}$. On peut mettre, au lieu de q, sa valeur $2\sqrt{p^n}$, ou $2p^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p}$, en prenant le radical avec le signe de q.

Ce qui précède donne le moyen d'évaluer les racines de l'équation $X = 0$, c'est-à-dire les racines de $f'(x) = 0$ qui n'annulent pas $f(x)$. Elles ne sont autres, en effet, que les racines communes à $f(x) = 0$ et à $f'(x) = 0$, prises en signes contraires. Cela résulte, soit de ce que l'on a $a_k + a_{n-k} = 0$, comme on a vu plus haut, soit de ce que l'on doit avoir $f(a) = 2q$, a étant racine de $X = 0$; ce qui revient à changer le signe de q dans $f(x) = 0$ après avoir écrit a au lieu de x, et par conséquent à prendre les racines ci-dessus de $\frac{f'(x)}{X} = 0$ avec des signes contraires.

Il vient donc

$$X = (x - \beta_1\sqrt{p})(x - \beta_2\sqrt{p})\ldots\left(x - \beta_{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p}\right),$$

et par conséquent

$$f'(x) = n(x^2 - \beta_1^2 p)(x^2 - \beta_2^2 p)\ldots\left(x^2 - \beta_{\frac{n-1}{2}}^2 p\right).$$

On a ainsi, dans le cas de

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

une méthode générale d'abaissement et de décomposition des équations

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = 0,$$

au moyen de l'équation en β qui donne les sommes des racines réciproques de l'équation binôme du degré n.

3. Cette décomposition n'a plus lieu pour l'équation

$$f(x) = 0$$

quand on a

$$\frac{q^2}{4} - p^n \gtrless 0,$$

mais elle a toujours lieu pour la dérivée, car celle-ci demeure invariable quelle que soit la valeur de q. Mais dans tous les cas (n étant impair) on a, entre $f(x)$ et les racines de la dérivée, les relations très-remarquables qui suivent :

1° $$\frac{q^2}{4} - p^n > 0, \quad q = +2\sqrt{p^n} + r^2,$$

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = +4\sqrt{p^n} + r^2, \\ f(a_{2k}) = +r^2; \end{cases}$$

2° $$\frac{q^2}{4} - p^n < 0, \quad q = +2\sqrt{p^n} - r^2 > 0,$$

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = +4\sqrt{p^n} - r^2, \\ f(a_{2k}) = -r^2; \end{cases}$$

3° $$\frac{q^2}{4} - p^n < 0, \quad q = -2\sqrt{p^n} + r^2 < 0,$$

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = +r^2, \\ f(a_{2k}) = -4\sqrt{p^n} + r^2; \end{cases}$$

4° $$\frac{q^2}{4} - p^n > 0, \quad q = -2\sqrt{p^n} - r^2,$$

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = -r^2, \\ f(a_{2k}) = -4\sqrt{p^n} - r^2. \end{cases}$$

On résume ce qui précède en disant que :

Pour

$$q = +2\sqrt{p^n} \pm r^2 > 0,$$

on a

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = +4\sqrt{p^n} \pm r^2, \\ f(a_{2k}) = \pm r^2; \end{cases}$$

Pour

$$q = -2\sqrt{p^n} \pm r^2 < 0,$$

on a

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = \pm r^2, \\ f(a_{2k}) = -4\sqrt{p^n} \pm r^2. \end{cases}$$

Remarque. — Dans le cas particulier de $q = 0$, on aurait

$$x_n = \sqrt{-p} - \sqrt{-p} = 0,$$

$$x_1 = (\alpha - \alpha^{n-1})\sqrt{-p} = -x_{n-1},$$

$$x_2 = (\alpha^2 - \alpha^{n-2})\sqrt{-p} = -x_{n-2},$$

. . . .

$$x_{\frac{n-1}{2}} = \left(\alpha^{\frac{n-1}{2}} - \alpha^{\frac{n+1}{2}}\right)\sqrt{-p} = -x_{\frac{n+1}{2}},$$

et

$$f(x) = x(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots\left(x^2 - x_{\frac{n-1}{2}}^2\right);$$

il y aurait donc une racine égale à zéro, tandis que les autres seraient deux à deux égales et de signes contraires;

ce qui doit être d'après la forme de l'équation. Toutes les racines d'ailleurs seraient réelles, puisque, p étant positif, on aurait nécessairement $\frac{q^2}{4} - p^n < 0$; ce qui résulte aussi de ce que la valeur de la fonction $\alpha^k - \alpha^{n-k}$ est toujours de la forme $\mathrm{R}\sqrt{-1}$.

Par la substitution des racines a dans $f(x)$, il vient en ce cas

$$f(a_{2k+1}) = -f(a_{2k}) = +2\sqrt{p^n}.$$

(*La suite prochainement.*)