NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

# Analogies de la géométrie du plan à celle de l'espace

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 4 (1865), p. 193-209

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__193_0>

# ANALOGIES DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN A CELLE DE L'ESPACE

(voir page 145);

PAR M. PAUL SERRET.

## II.

4. On sait que l'équation générale des plans tangents de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

rapporté à ses axes de figure, est

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\mathrm{P}=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2};$$

P désignant la distance du centre de la surface au plan tangent considéré; et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus des inclinaisons, sur les axes $2a$, $2b$, $2c$ de l'ellipsoïde, de la normale correspondante N. Traduisant en langage ordinaire la formule qui donne la valeur de P, on peut dire que *le carré de la distance du centre de l'ellipsoïde à l'un quelconque de ses plans tangents est égal à la somme des carrés des produits obtenus en multipliant chacun des demi-axes* a, b, c *de l'ellipsoïde par le cosinus de l'angle formé par la direction de cet axe avec la normale correspondante* N :

$$\mathrm{P}^2=a^2\cos^2(\mathrm{N},a)+b^2\cos^2(\mathrm{N},b)+c^2\cos^2(\mathrm{N},c).$$

5. *Du lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à sept plans.* — Soient, relativement à un

système quelconque d'axes rectangulaires,

$$0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_7,$$

les sept plans donnés : chacune des fonctions P étant de la forme

$$P = Ax + By + Cz - p,$$

où A, B, C désignent les cosinus directeurs de la normale N menée de l'origine au plan P, et $p$ la distance de l'origine à ce plan.

Soient, en outre, $(x, y, z)$ le centre d'un ellipsoïde tangent aux sept plans donnés; $a$, $b$, $c$ les longueurs de ses demi-axes; et

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ | les cosinus directeurs de l'axe | $2a$, |
| $\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ | » | $2b$, |
| $\alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$ | » | $2c$. |

D'après la remarque précédente, on aura cette double expression de la distance du centre de l'ellipsoïde à l'un quelconque des sept plans tangents :

$$\begin{aligned} P^2 &= (Ax + By + Cz - p)^2 \\ &= a^2\cos^2(N, a) + b^2\cos^2(N, b) + c^2\cos^2(N, c), \end{aligned}$$

ou, en développant les cosinus,

$$\begin{aligned} (Ax + By + Cz - p)^2 &= a^2(A\alpha + B\beta + C\gamma)^2 \\ + b^2(A\alpha' + B\beta' + C\gamma')^2 &+ c^2(A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'')^2. \end{aligned}$$

De là, en appliquant cette équation à chacun des plans $P_1, P_2, \ldots, P_7$,

$$1^\circ \left\{ \begin{aligned} &(A_1x + B_1y + C_1z - p_1)^2 = a^2(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)^2 \\ &+ b^2(A_1\alpha' + B_1\beta' + C_1\gamma')^2 + c^2(A_1\alpha'' + B_1\beta'' + C_1\gamma'')^2, \end{aligned} \right.$$

$$2^\circ \left\{ \begin{aligned} &(A_2x + B_2y + C_2z - p_2)^2 = a^2(A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma)^2 \\ &+ b^2(A_2\alpha' + B_2\beta' + C_2\gamma')^2 + c^2(A_2\alpha'' + B_2\beta'' + C_2\gamma'')^2, \end{aligned} \right.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$7^\circ \left\{ \begin{aligned} &(A_7x + B_7y + C_7z - p_7)^2 = a^2(A_7\alpha + B_7\beta + C_7\gamma)^2 \\ &+ b^2(A_7\alpha' + B_7\beta' + C_7\gamma')^2 + c^2(A_7\alpha'' + B_7\beta'' + C_7\gamma'')^2, \end{aligned} \right.$$

et la détermination du lieu des centres $(x, y, z)$ serait ramenée à l'élimination des *douze* variables

$$a, b, c; \quad \alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'', \beta'', \gamma''$$

entre les *sept* équations que l'on vient d'écrire et les *six* relations que l'on sait exister entre les neuf cosinus relatifs à trois directions rectangulaires. Mais il arrive ici que l'élimination peut s'effectuer indépendamment de ces six relations. Au point de vue analytique, cela résulte d'un mode particulier de symétrie que présentent les équations 1°, 2°, 3°,..., 7°; et d'après lequel, les quantités

$$\begin{array}{llll} a^2\alpha^2, & b^2\alpha'^2 & \text{et} & c^2\alpha''^2; \\ a^2\beta^2, & b^2\beta'^2 & \text{»} & c^2\beta''^2; \\ a^2\gamma^2, & b^2\gamma'^2 & \text{»} & c^2\gamma''^2; \\ a^2\alpha\beta, & b^2\alpha'\beta' & \text{et} & c^2\alpha''\beta''; \\ a^2\beta\gamma, & b^2\beta'\gamma' & \text{»} & c^2\beta''\gamma''; \\ a^2\alpha\gamma, & b^2\alpha'\gamma' & \text{»} & c^2\alpha''\gamma'' \end{array}$$

entrant de la même manière dans toute combinaison de ces équations, il suffira de rendre nuls les coefficients des termes en

$$a^2\alpha^2, \ a^2\beta^2, \ a^2\gamma^2; \quad a^2\alpha\beta, \ a^2\beta\gamma, \ a^2\alpha\gamma$$

dans l'équation résultant de cette combinaison, pour voir disparaître toutes les variables.

Égalons donc à zéro le coefficient de chacune de ces quantités dans l'équation qui résulterait de l'addition des équations 1, 2, 3,..., 7 multipliées respectivement par les nombres indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_7$; il vient

$$(\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \ldots + \lambda_7 A_7^2 = 0, \\ \lambda_1 B_1^2 + \lambda_2 B_2^2 + \ldots + \lambda_7 B_7^2 = 0, \\ \lambda_1 C_1^2 + \lambda_2 C_2^2 + \ldots + \lambda_7 C_7^2 = 0, \\ \lambda_1 A_1 B_1 + \lambda_2 A_2 B_2 + \ldots + \lambda_7 A_7 B_7 = 0, \\ \lambda_1 B_1 C_1 + \lambda_2 B_2 C_2 + \ldots + \lambda_7 B_7 C_7 = 0, \\ \lambda_1 A_1 C_1 + \lambda_2 A_2 C_2 + \ldots + \lambda_7 A_7 C_7 = 0. \end{array} \right.$$

Or si, multipliant les équations 1°, 2°, 3°, ..., 7° respectivement par les nombres actuellement déterminés $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_7$, on les ajoute membre à membre; le second membre de l'équation résultante, ordonné par rapport aux dix-huit quantités telles que $a^2\alpha^2$, $a^2\beta^2$, $a^2\gamma^2$; $a^2\alpha\beta$, $a^2\beta\gamma$, $a^2\alpha\gamma$, a tous ses coefficients nuls et est lui-même identiquement nul. L'élimination des douze variables se trouve donc effectuée, et le lieu des centres est représenté par l'équation

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z - p_1)^2 + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z - p_2)^2 + \ldots \\ + \lambda_7(A_7x + B_7y + C_7z - p_7)^2 = 0,$$

ou

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = 0.$$

D'ailleurs, et en vertu des mêmes relations ($\lambda$), les carrés et les rectangles des coordonnées $x$, $y$, $z$ disparaissent d'eux-mêmes du premier membre de cette équation qui s'abaisse au premier degré. Le lieu des centres est donc un plan, et l'on a ce théorème :

*Le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes aux sept plans*

$$0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_7$$

*est le plan unique représenté par l'équation*

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \ldots + \lambda_7 P_7^2 = 0, \\ \text{ou} \quad \sum_1^7 \lambda P^2 = 0, \end{array} \right.$$

rendue linéaire par un choix convenable des coefficients.

*Remarque I.* — On sait que le lieu des centres des ellipsoïdes inscrits à un octaèdre hexagonal est le plan mené par les points milieux des trois diagonales. Ce plan, rapporté à sept quelconques des faces de l'octaèdre, peut donc être représenté, de huit manières différentes, par une équation de la forme

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = 0.$$

*Remarque II.* — Développant l'équation du plan général des centres, on trouve

$$x(\lambda_1 p_1 . A_1 + \lambda_2 p_2 . A_2 + \ldots + \lambda_7 p_7 \, A_7) + y(\lambda_1 p_1 . B_1 + \ldots)$$
$$+ z(\lambda_1 p_1 . C_1 + \ldots) + H = 0;$$

de là, pour la normale menée de l'origine à ce plan,

$$\frac{x}{\lambda_1 p_1 . A_1 + \ldots + \lambda_7 p_7 . A_7} = \frac{y}{\lambda_1 p_1 . B_1 + \ldots + \lambda_7 p_7 . B_7}$$
$$= \frac{z}{\lambda_1 p_1 . C_1 + \ldots + \lambda_7 p_7 . C_7}.$$

La normale au plan des centres coïncide donc avec la résultante d'un contour polygonal dont les côtés successifs seraient représentés en grandeur, direction et sens par les perpendiculaires $p_1, p_2, \ldots, p_7$, menées de l'origine à chacun des sept plans donnés, respectivement multipliées par les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7$.

Il est remarquable que les changements apportés dans ce contour par le déplacement de l'origine laissent invariable la direction de sa résultante.

*Remarque III.* — L'équation

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = 0$$

subsiste toujours, quelle que soit l'obliquité des axes. Choisissant, par exemple, trois des sept plans tangents pour plans des $x$, $y$, $z$; le plan général des centres demeurera représenté par l'équation

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \sum_1^4 \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right)^2 = 0,$$

rendue linéaire en $x$, $y$, $z$ par un choix convenable des coefficients.

*Remarque IV.* — Le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes aux huit plans

$$0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_7 = P_8$$

est évidemment une ligne. Cette ligne, d'ailleurs, est droite, puisqu'elle doit être contenue en particulier dans chacun des plans

$$0 = \sum_1^7 \lambda P^2, \quad 0 = \sum_2^8 \lambda P^2;$$

et il est aisé de voir que l'équation

$$\sum_1^8 \lambda P^2 = 0,$$

rendue linéaire à l'aide des coefficients, représente tous les plans menés, en nombre infini, par la droite générale des centres; ou la série des plans diamétraux communs à toutes les surfaces considérées.

*Remarque V.* — L'équation

$$\sum_1^9 \lambda P^2 = 0$$

représenterait de même tous les plans menés par le centre unique de la surface du second ordre définie par les neuf plans tangents

$$0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_8 = P_9,$$

ou le système des plans diamétraux de cette surface.

*Remarque VI.* — Il resterait maintenant à déduire de l'équation principale

$$(1)\qquad \sum_{1}^{7} \lambda P^2 = 0,$$

convenablement interprétée, la construction même du plan général des centres.

Que si, essayant, comme le veut l'analogie, les considérations utilisées déjà dans la question analogue de Géométrie plane, on forme l'équation du plan polaire d'un point quelconque $(\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_7)$, par rapport au plan des centres assimilé à une surface du second ordre par l'adjonction du *plan à l'infini* : on trouvera toujours ce plan polaire représenté par l'équation

$$\lambda_1 \varpi_1 . P_1 + \lambda_2 \varpi_2 . P_2 + \ldots + \lambda_7 \varpi_7 . P_7 = 0;$$

et l'on reconnaîtra encore que les rayons vecteurs menés du pôle à ce plan sont divisés en deux parties égales par le plan général des centres. Mais si, plaçant le pôle en l'un des sommets du solide formé par les sept plans, on pose, par exemple,

$$0 = \varpi_5 = \varpi_6 = \varpi_7;$$

l'équation du plan polaire correspondant

$$(2)\qquad \lambda_1 \varpi_1 . P_1 + \lambda_2 \varpi_2 . P_2 + \lambda_3 \varpi_3 . P_3 + \lambda_4 \varpi_4 . P_4 = 0$$

n'admet plus aucune solution connue. Quoique toujours parallèle au plan des centres, le plan polaire ne nous laisse apercevoir aucun de ses points; et ne nous montre plus, dans le milieu de la droite qui réunirait ce point au pôle, un point du plan que nous cherchons.

L'analogie paraît donc interrompue; et bien que l'on puisse y suppléer, comme nous le verrons, et définir géométriquement le plan des centres; une autre définition serait à désirer, uniquement fondée sur l'équation (1) et le parallélisme de tous les plans polaires. Il est vraisemblable que le plan serait la seule surface à employer dans la construction qui en résulterait; tandis que la sphère intervient seule dans celle que nous allons exposer.

6. *Du lieu des centres des surfaces du second ordre, tangentes à six plans, et dont les carrés des axes conservent une somme constante.* — Les six plans donnés étant

$$0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_6,$$

et toutes les notations du numéro précédent étant conservées, on aura à associer la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2 = \text{const.}$$

aux six premières des équations 1°, 2°, 3°,..., 7° du n° 5; ou à éliminer les *douze* variables entre les *sept* équations

$$1^\circ \left\{ \begin{aligned} &(A_1 x + B_1 y + C_1 z - p_1)^2 = a^2 (A_1 \alpha + B_1 \beta + C_1 \gamma)^2 \\ &+ b^2 (A_1 \alpha' + B_1 \beta' + C_1 \gamma')^2 + c^2 (A_1 \alpha'' + B_1 \beta'' + C_1 \gamma'')^2, \end{aligned} \right.$$

$$2^\circ \left\{ \begin{aligned} &(A_2 x + B_2 y + C_2 z - p_2)^2 = a^2 (A_2 \alpha + B_2 \beta + C_2 \gamma)^2 \\ &+ b^2 (A_2 \alpha' + B_2 \beta' + C_2 \gamma')^2 + c^2 (A_2 \alpha'' + B_2 \beta'' + C_2 \gamma'')^2, \end{aligned} \right.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$6^\circ \left\{ \begin{aligned} &(A_6 x + B_6 y + C_6 z - p_6)^2 = a^2 (A_6 \alpha + B_6 \beta + C_6 \gamma)^2 \\ &+ b^2 (A_6 \alpha' + B_6 \beta' + C_6 \gamma')^2 + c^2 (A_6 \alpha'' + B_6 \beta'' + C_6 \gamma'')^2, \end{aligned} \right.$$

$$7^\circ \qquad a^2 + b^2 + c^2 = k^2 = \text{const.};$$

et les *six* relations existant entre les neuf cosinus. Or, l'élimination peut encore s'effectuer indépendamment des trois relations qui résultent de l'orthogonalité des axes $2a$, $2b$, $2c$ de l'ellipsoïde.

Soient, en effet, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ six coefficients définis par les conditions suivantes :

$$(\lambda)\quad\left\{\begin{aligned}
&\lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \ldots + \lambda_6 A_6^2 = 1,\\
&\lambda_1 B_1^2 + \lambda_2 B_2^2 + \ldots + \lambda_6 B_6^2 = 1,\\
&\lambda_1 C_1^2 + \lambda_2 C_2^2 + \ldots + \lambda_6 C_6^2 = 1;\\
&\lambda_1 A_1 B_1 + \lambda_2 A_2 B_2 + \ldots + \lambda_6 A_6 B_6 = 0,\\
&\lambda_1 B_1 C_1 + \lambda_2 B_2 C_2 + \ldots + \lambda_6 B_6 C_6 = 0,\\
&\lambda_1 A_1 C_1 + \lambda_2 A_2 C_2 + \ldots + \lambda_6 A_6 C_6 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les équations 1°, 2°, ..., 6° étant respectivement multipliées par les nombres $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_6$ ainsi déterminés, et ajoutées membre à membre; les neuf termes, tels que $a^2\alpha\beta$, $a^2\beta\gamma$, $a^2\alpha\gamma$, disparaissent d'eux-mêmes du second membre de l'équation résultante, les termes en $a^2\alpha^2$, $a^2\beta^2$, $a^2\gamma^2$, ayant des coefficients égaux à l'unité, se réduisent à $a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a^2$; les termes en $b^2\alpha'^2$, $b^2\beta'^2$, $b^2\gamma'^2$ se réduisent à $b^2$; les termes en $c^2\alpha''^2$, $c^2\beta''^2$, $c^2\gamma''^2$ à $c^2$; et l'ensemble de ces termes se réduit à $a^2 + b^2 + c^2$ ou $k^2$, en vertu de la relation 7°. Toutes les variables ont donc disparu; et l'on a, pour le lieu cherché,

$$(\text{II})\quad\left\{\begin{aligned}
&\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z - p_1)^2 + \lambda_2(A_2x + \ldots)^2 + \ldots\\
&+ \lambda_6(A_6x + B_6y + C_6z - p_6)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.},\\
&\qquad\text{ou}\quad \sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.}
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, les rectangles des coordonnées disparaissent d'eux-mêmes du premier membre de cette équation, en vertu des relations $(\lambda)$; les coefficients de $x^2$, $y^2$, $z^2$ y sont égaux à l'unité; le lieu des centres est une sphère dont le centre est indépendant de la valeur assignée à la constante $a^2 + b^2 + c^2$ (Mention); et l'on a ce théorème :

*Le lieu des centres des surfaces du second ordre,* *tangentes aux six plans*

$$o = P_1 = P_2 = \ldots = P_6,$$

*et dont les carrés des axes conservent une somme constante, est la sphère représentée par l'équation*

$$\text{(II)} \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 (A_1 x + B_1 y + C_1 z - p_1)^2 + \ldots \\ + \lambda_6 (A_6 x + B_6 y + C_6 z - p_6)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.}, \\ \text{ou} \quad \sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.}, \end{array} \right.$$

ramenée à la forme $x^2 + y^2 + z^2 + \ldots = o$, par un choix convenable des coefficients.

*Remarque I.* — On trouve aisément, pour les coordonnées du centre,

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 p_1 . A_1 + \ldots + \lambda_6 p_6 . A_6, \\ y &= \lambda_1 p_1 . B_1 + \ldots + \lambda_6 p_6 . B_6, \\ z &= \lambda_1 p_1 . C_1 + \ldots + \lambda_6 p_6 . C_6; \end{aligned}$$

et l'on voit que le centre de la sphère des centres coïncide avec l'extrémité d'un contour polygonal dont le point de départ serait à l'origine, et dont les côtés successifs seraient représentés en grandeur, direction et sens, par les perpendiculaires $p_1, p_2, \ldots, p_6$ menées de l'origine aux six plans donnés, respectivement multipliées par les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ : les changements apportés dans ce contour, par le déplacement de l'origine, laissant son extrémité immobile au même point.

*Remarque II.* — L'équation (II) subsisterait toujours, quelle que fût l'obliquité des axes. On pourrait, par exemple, choisir pour plans des $x, y, z$ trois des six plans tangents donnés; et la sphère des centres serait encore représentée par l'équation

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \sum_1^3 \lambda \left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} - 1\right)^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.},$$

ramenée toujours à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + \ldots = 0,$$

par un choix convenable des coefficients.

*Remarque III.* — Il serait aisé de déduire, du théorème actuel, le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à sept plans.

Soit, en effet, $a^2 + b^2 + c^2$ la somme des carrés des axes de l'un quelconque des ellipsoïdes tangents aux sept plans $0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_7$. Le centre de cet ellipsoïde devant appartenir, en particulier, à chacune des sphères

$$\sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

et

$$\sum_2^7 \mu P^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

appartiendra également au plan radical de ces sphères, représenté par l'équation

$$\sum_1^6 \lambda P^2 - \sum_2^7 \mu P^2 = 0,$$

ou au plan unique et déterminé

$$\sum_1^7 \lambda' P^2 = 0,$$

ce qui est le théorème du numéro précédent.

*Remarque IV.* — Toutes les sphères représentées, en nombre infini, par l'une des équations

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = 0,$$

$$\sum_1^8 \lambda P^2 = 0,$$

$$\sum_1^9 \lambda P^2 = 0$$

ont le même *plan*, le même *axe* ou le même *centre radical*, à savoir : le plan ou la droite des centres des ellipsoïdes tangents aux plans donnés, ou le centre unique de l'ellipsoïde tangent aux neuf plans

$$0 = P_1 = P_2 = . \; . = P_9.$$

*Remarque V.* — Revenons à la sphère principale

$$\text{(II)} \qquad \sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.}$$

et cherchons à en déterminer le centre.

Remarquons, à cet effet, toutes les sphères répondant aux diverses valeurs de la constante étant concentriques, que l'on peut supposer cette constante nulle. Le lieu considéré devient alors le lieu spécial des centres des hyperboloïdes *équilatères*,

$$a^2 \pm b^2 - c^2 = 0,$$

à une ou à deux nappes, tangents aux six plans donnés ; et la sphère particulière, dont on doit déterminer le centre, est représentée par l'équation *homogène*

$$\text{(III)} \qquad \sum_1^6 \lambda P^2 = 0.$$

Or, le plan polaire, relatif à la sphère (III), d'un point quelconque ($\varpi_1$, $\varpi_2$,... $\varpi_6$), a pour équation

$$\lambda_1 \varpi_1 . P_1 + \lambda_2 \varpi_2 . P_2 + \ldots + \lambda_6 \varpi_6 . P_6 = 0;$$

et si, au lieu de laisser ce point quelconque, on le place en l'un des sommets du polyèdre formé par les six plans donnés, en posant, par exemple,

$$(\varpi) \qquad 0 = \varpi_4 = \varpi_5 = \varpi_6,$$

on a, pour le plan polaire correspondant

$$(\Pi) \qquad \lambda_1 \varpi_1 . P_1 + \lambda_2 \varpi_2 . P_2 + \lambda_3 \varpi_3 . P_3 = 0:$$

équation d'un plan passant par le *sommet opposé* du polyèdre.

*Deux sommets opposés* quelconques du polyèdre formé par les six plans donnés *sont* donc *polairement conjugués par rapport à la sphère* particulière (III).

D'un autre côté, *deux points étant polairement conjugués par rapport à une sphère, et la droite qui réunit ces points étant prise pour diamètre d'une seconde sphère :* on sait que *ces deux sphères sont orthogonales.*

*La sphère des centres* (III) et *la sphère décrite sur l'une quelconque des diagonales du polyèdre* des six plans, *prise pour diamètre, sont donc orthogonales*. La détermination que l'on avait en vue se trouve réalisée, et l'on a cette suite de théorèmes :

1° Un système de *six* plans, situés d'une manière quelconque dans l'espace, donne lieu à dix diagonales réunissant le point de concours de trois de ces plans au point de concours des trois autres; et à dix sphères décrites sur chacune de ces diagonales comme diamètre : ces dix sphères ont le même centre radical et la même sphère orthogonale. Nous nommerons celle-ci la *sphère conjuguée* des six plans.

2° Le lieu des centres des hyperboloïdes équilatères

($a^2 \pm b^2 - c^2 = 0$), à une ou à deux nappes, tangents à six plans, est la sphère conjuguée des six plans, représentée par l'équation

$$\sum_1^6 \lambda P^2 = 0.$$

3° *Sept* plans étant donnés, les sept sphères conjuguées de six de ces plans se coupent dans un même cercle, le *cercle conjugué* des sept plans ; ce cercle est le lieu géométrique des centres des hyperboloïdes équilatères, tangents aux sept plans donnés ; et son plan, qui coïncide avec le plan général des centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes à ces sept plans, est représenté par l'équation

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = 0.$$

4° *Huit* plans étant donnés, les huit cercles conjugués de sept de ces plans se coupent dans les deux mêmes points ; ces points sont les centres des deux hyperboloïdes équilatères tangents aux huit plans donnés ; et la droite qui les réunit, ou l'*axe conjugué* des huit plans, coïncide avec la droite générale des centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes à ces huit plans. Cette droite n'est autre, d'ailleurs, que la commune intersection de tous les plans contenus, en nombre infini, dans l'équation

$$\sum_1^8 \lambda P^2 = 0.$$

5° *Neuf* plans étant donnés, les neuf axes conjugués de huit de ces plans se coupent dans un même point : le centre de la surface du second ordre tangente aux neuf plans, et le point de commune intersection de tous les plans contenus dans l'équation

$$\sum_1^9 \lambda P^2 = 0.$$

7. Parmi les conséquences géométriques du théorème précédent, on peut citer celles-ci :

Si quatre des diagonales d'un système de *six* plans ont leurs points milieux dans le même plan : les points milieux des dix diagonales sont dans un même plan représenté par l'équation

$$\sum_1^6 \lambda P^2 = 0.$$

Si quatre des plans-hauteurs menés, par l'un des *sommets* d'un système de *cinq* plans, perpendiculairement à l'*arête opposée*, se coupent en un même point : les dix plans analogues se coupent au même point.

On doit noter encore cette traduction géométrique de l'équation (II)

$$\sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2 :$$

Six plans tangents et le centre d'une surface du second ordre étant donnés, la puissance de ce centre, par rapport à la sphère conjuguée des six plans, mesure la somme des carrés des axes principaux de la surface.

## III.

8. La méthode que l'on vient de développer n'est pas limitée à la détermination du lieu des centres des courbes ou des surfaces du second ordre assujetties à certaines conditions. Le principe sur lequel elle est fondée interviendrait encore utilement dans la recherche, par exemple, du lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère ; en conduisant, pour l'équation du lieu, à une forme abrégée remarquable et qui se prêterait, bien mieux que l'équation ordinaire, à sa construction définitive. Mais, laissant de côté ces applications, d'ailleurs très-secondaires, de notre méthode, nous indiquerons en-

core quelques formules simples qui en résultent immédiatement.

9. Trois tangentes et le centre d'une conique étant donnés, l'équation aux axes principaux de la courbe est

$$(1)\qquad a\sqrt{A^2-\alpha^2}+b\sqrt{A^2-\beta^2}+c\sqrt{A^2-\gamma^2}=0:$$

$a$, $b$, $c$ désignant les trois côtés du triangle des trois tangentes; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les distances du centre à ces côtés; et A l'un quelconque des demi-axes de la courbe.

10. Trois points et le centre d'une conique étant donnés, l'équation aux axes principaux est

$$(2)\quad a\alpha\sqrt{A^2-\alpha'^2}+b\beta\sqrt{A^2-\beta'^2}+c\gamma\sqrt{A^2-\gamma'^2}=0:$$

$\alpha$, $b$, $c$ et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignant encore les côtés du triangle des trois points, et les distances du centre à ces côtés; tandis que $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ désignent les distances du centre aux sommets du triangle, ou aux points donnés.

11. Étant donnés quatre plans tangents et le centre d'un ellipsoïde de révolution; l'axe double 2A, ou le diamètre du cercle principal de la surface, est défini par l'équation

$$(\mathrm{I})\qquad \sum_1^4 \sin(234).\sqrt{A^2-P_1^2}=0:$$

$P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ désignant les distances du centre aux plans donnés, et sin (234) le sinus de l'*angle solide* formé par les normales de trois de ces plans.

12. Étant donnés quatre points et le centre d'un ellipsoïde de révolution; l'axe double 2A de la surface est défini par l'équation

$$(\mathrm{II})\qquad \sum_1^4 \sin(\rho_2\rho_3\rho_4).\frac{\sqrt{A^2-\rho_1^2}}{\rho_1}=0:$$

$\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$, $\rho_4$ désignant les demi-diamètres menés du centre aux quatre points donnés, et sin $(\rho_2\rho_3\rho_4)$ le sinus de l'angle solide formé de trois de ces demi-diamètres.

(*La suite prochainement.*)