Bulletin

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 182-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__182_1>

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

IV.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, par *Jules de la Gournerie*, Ingénieur en chef, etc. Troisième partie. xx-216 pages, et Atlas de 46 planches. Paris, 1864, chez Gauthier-Villars.

La troisième Partie du *Cours de Géométrie descriptive* se compose de trois Livres consacrés à la théorie de la *courbure des surfaces*, aux *surfaces hélicoïdales* et aux *surfaces topographiques*.

Pour exposer la théorie de la courbure des surfaces, M. de la Gournerie part du théorème de M. Bertrand sur la déviation de la normale. Il en déduit la formule d'Euler, l'indicatrice de M. Dupin et les surfaces osculatrices du second degré.

L'auteur discute ensuite la formule d'Euler dans les plus grands détails; il fait voir qu'en général une surface se divise en deux régions caractérisées par des indicatrices elliptiques ou hyperboliques séparées par une courbe dont les points ont pour indicatrices des paraboles.

Après avoir étudié les courbures des sections normales, on détermine celles des sections obliques à l'aide du théorème de Meusnier. Lorsque le plan sécant devient tangent, ce théorème donne pour le rayon de courbure une valeur indéterminée. Pour ce cas, M. de la Gournerie établit une formule nouvelle fondée sur la relation

$$E = \varepsilon\delta,$$

dans laquelle E est l'angle de contingence de la section normale passant par l'une des asymptotes de l'indicatrice, ε l'angle de contingence de la branche de courbe située dans le plan tangent et tangente à la même asymptote de l'indicatrice, et δ la déviation de la normale à l'extrémité de l'axe considéré.

Comme exemple, M. de la Gournerie étudie les surfaces de révolution et les surfaces gauches. Dans les premières, les sections principales sont la courbe méridienne, et la section normale qui lui est perpendiculaire; les rayons de courbure principaux sont le rayon de courbure de la méridienne et la portion de la normale comprise entre le point considéré et l'axe de la surface.

Les surfaces gauches sont à courbures opposées, et la génératrice qui passe en un point est une des asymptotes de l'indicatrice en ce point. L'autre asymptote est la génératrice de l'hyperboloïde osculateur.

Deux surfaces gauches qui se raccordent le long d'une génératrice sont osculatrices en deux points de cette génératrice.

Le lieu des centres de courbure d'une surface gauche correspondant aux divers points d'une même génératrice est en général une courbe gauche du quatrième degré, qui est l'intersection du paraboloïde formé par les normales, et d'un hyperboloïde à une nappe.

Lorsque la génératrice considérée est singulière, le paraboloïde des normales devient un plan, et le lieu des centres de courbure est alors une courbe du second degré.

Comme application de cette théorie, M. de la Gournerie étudie la surface gauche formée par les normales à une même surface menées par les différents points d'une courbe tracée sur cette surface. Pour exposer plus simplement les résultats auxquels il est parvenu par l'analyse, M. de la Gournerie a recourt à la considération ingénieuse de la droite auxiliaire, due à M. Mannheim.

Si par le point central A d'une génératrice on élève sur cette droite une perpendiculaire AA′, égale au paramètre de distribution, l'angle sous lequel on voit du point A′ un segment BC de la génératrice est égal à l'angle que forment les plans tangents en B et C. Soit O un point quelconque de la génératrice, menons par le point A′ une perpendiculaire PQ à A′O, et soient en outre B′ et C′ les points de PQ qui se projettent en B et C : l'angle B′OC′ est égal à l'angle que font entre eux les plans tangents en B et C. D'après cela, quand on connaît les plans tangents en trois points O, B, C d'une même génératrice, il est facile de construire la droite auxiliaire PQ, relative au point O, d'où l'on déduit le point central et le paramètre de distribution.

Dans le second Chapitre, M. de la Gournerie fait voir comment on peut, à l'aide des théorèmes d'Euler et de Meusnier, déterminer le plan osculateur et le centre de courbure d'une courbe donnée par ses deux projections.

Lorsque deux surfaces sont tangentes en un point, en général elles se coupent suivant une courbe dont deux branches passent par ce point. Pour obtenir les tangentes à ces deux branches, il suffit de tracer les diamètres communs aux indicatrices des deux surfaces.

Dans le troisième Chapitre, M. de la Gournerie démontre le théorème de M. Dupin sur les tangentes conjuguées; ensuite il étudie les courbes d'ombre des surfaces gauches dans différents cas particuliers, et arrive à des résultats nouveaux et intéressants.

Enfin, M. de la Gournerie discute avec le plus grand soin les parties réelles et les parties virtuelles des courbes d'ombre, et obtient ce théorème général :

Quand sur une surface la courbe d'ombre propre et la courbe d'ombre portée se rencontrent, leurs tangentes sont conjuguées.

Lorsqu'une surface est osculée par un plan, le théorème de M. Dupin ne donne plus la tangente à la courbe d'ombre qui passe par ce point; cela tient à ce que, dans ce cas, la courbe d'ombre a deux tangentes; on détermine ces droites à l'aide du théorème suivant, dû à M. de la Gournerie :

Quand une surface est osculée par un plan en un point, si elle est éclairée par un point lumineux situé dans ce plan, le point d'osculation appartient deux fois à la courbe d'ombre, et les deux branches sont tangentes aux deux droites qui forment le diamètre de l'indicatrice du troisième ordre, par rapport à la direction du rayon de lumière.

Le quatrième Chapitre est consacré aux lignes de courbure. Pour déterminer celles des surfaces du second ordre, M. de la Gournerie démontre le théorème de M. Dupin sur les surfaces orthogonales, et le théorème de Binet sur les surfaces homofocales du second degré. Il résulte de ces deux théorèmes que les lignes de courbure d'une surface du second degré sont les sections faites dans cette surface par les surfaces homofocales. Les projections de ces lignes sur les plans principaux de la surface considérée sont des courbes du second degré.

Sur une surface quelconque, on appelle *ligne asymptotique* celle qui touche en chacun de ses points une des asymptotes de l'indicatrice. Son plan osculateur est tangent à la surface. M. de la Gournerie étudie les lignes asymptotiques des surfaces gauches et des surfaces de révolution.

En général, le cercle osculateur d'une section normale à une surface n'a qu'un contact du second ordre avec cette section; mais pour certaines positions du plan sécant le contact s'élève au troisième ordre. On dit alors que ces sections sont surosculées par des cercles. En un point d'une surface quelconque il y a trois sections normales surosculées par des cercles. Pour une surface du second degré, ces sections sont les deux génératrices, et la courbe dont le plan est conjugué du diamètre qui passe par le milieu de la normale.

Sur une surface quelconque on peut concevoir une courbe qui soit en chacun de ses points tangente à une section normale surosculée par un cercle. Pour une surface du second degré, une telle courbe est la ligne de contact de la surface avec une développable qui est circonscrite à la fois à cette surface et à une sphère concentrique. Ces courbes, que M. Poinsot a appelées *polhodies*, se projettent sur les plans principaux de la surface, considérée suivant des coniques semblables et semblablement placées.

Le second Livre, relatif aux surfaces hélicoïdes, est divisé en cinq Chapitres.

Dans le premier Chapitre, M. de la Gournerie définit d'une manière générale la surface hélicoïde comme le lieu des hélices de même axe et de même pas qui passent par les différents points d'une hélice donnée. Il complète cette définition en remarquant que cette surface peut être engendrée par la directrice tournant autour de l'axe d'un mouvement uniforme, et ayant en même temps un mouvement uniforme de translation parallèlement à cette droite. La courbe directrice est appelée méridienne lorsqu'elle est plane et que son plan passe par l'axe. Le rapport de la vitesse de translation à la vitesse angulaire de rotation, qui est un élément très-important de la surface, n'avait jusqu'à présent reçu aucune dénomination particulière; M. de la Gournerie le désigne sous le nom de *pas réduit*, expression heureusement choisie, car ce rapport n'est autre chose que le pas commun des hélices divisé par 2π.

Lorsque la directrice est une droite, en général la surface est gauche. L'hélice qui passe par le pied de la plus courte distance de l'axe à la génératrice est appelée hélice de gorge. Quand la génératrice coupe l'hélice de gorge, la surface est gauche, et quand la génératrice touche l'hélice de gorge, la surface est développable.

Désignons par b le rayon de l'hélice de gorge, par h son pas réduit, par β l'angle que sa tangente fait avec un plan perpendiculaire à l'axe, et par α l'angle que la génératrice fait avec le même plan. Ces quatre quantités définissent complétement la surface, mais elles ne sont pas indépendantes les unes des autres, car on a la relation

$$(1) \qquad h = b \tang \beta.$$

Sur un hélicoïde gauche la ligne de striction est l'hélice de gorge. Toutes les génératrices ont le même paramètre. La valeur de ce paramètre est

$$(2) \qquad k = b(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta).$$

Pour que deux hélicoïdes puissent s'appliquer l'un sur l'autre, il faut que le paramètre des génératrices soit le même, et que ces droites coupent l'hélice de gorge sous le même angle ε, ce qui donne la relation

$$(3) \qquad \alpha - \beta = \varepsilon.$$

k et ε étant donnés, tous les hélicoïdes dont les éléments satisfont aux trois équations (1), (2), (3) sont applicables les uns sur les autres. En éliminant α et β entre ces trois relations, on trouve

$$b^2 + h^2 - k\cot\varepsilon . b + kh = 0.$$

Si l'on regarde b et h comme les coordonnées rectangulaires d'un point variable, cette équation représente un cercle. Ce cercle, indiqué par M. Bour dans son *Mémoire sur la déformation des surfaces*, permet de déterminer immédiatement deux des trois quantités b, h et α, lorsque l'une d'elles est donnée.

Tous les hélicoïdes de même axe, correspondant à un même système de valeurs de h et de α, ont les mêmes plans tangents à l'infini. Celui qui a pour rayon $h\cot\alpha$ est développable, il est donc la développable asymptote de tous les autres.

Lorsque la génératrice se déplace en décrivant la surface, elle rencontre une infinité de fois sa position primitive; par chacun de ces points passe une hélice double. L'hélicoïde possède donc une infinité d'hélices doubles ayant des rayons de plus en plus grands.

Le second Chapitre renferme la théorie de l'hélicoïde développable.

Un hélicoïde développable, déterminé par son arête de rebroussement, a pour trace, sur un plan perpendiculaire à l'axe, une développante de cercle. Cette surface est d'égale pente, car son cône directeur est de révolution. D'après cela, on résout facilement les divers problèmes relatifs aux plans tangents de l'hélicoïde développable.

Pour trouver les sections planes de cette surface, on peut construire les projections d'un certain nombre de génératrices, et déterminer les points d'intersection de ces droites avec le plan sécant. Mais il est préférable d'employer une méthode remarquable par son élégance et sa simplicité, due à M. Bour, et qui s'applique à toutes les surfaces dont les génératrices font un angle constant avec le même plan.

Soit AB la trace horizontale d'une surface réglée dont les génératrices font avec le plan horizontal un angle constant α. Soient PQ la trace horizontale du plan sécant et θ l'inclinaison de ce plan. Soient CM la projection horizontale d'une génératrice de la surface, et CQ la perpendiculaire à cette droite, C étant la trace horizontale de la génératrice et M la projection horizontale du point où cette droite rencontre le plan sécant. Abaissons MD perpendiculaire sur PQ; si nous désignons par Z la hauteur du point d'intersection au-dessus du plan horizontal, nous aurons

$$Z = \mathrm{MC} \tang \alpha = \mathrm{MD} \tang \theta.$$

Dès lors la question revient à trouver sur la droite MC un point tel, que le rapport de ses distances aux droites données soit égal à un rapport donné. Pour cela il suffit de porter, à partir d'un point fixe O, deux longueurs OE et OF respectivement parallèles à CQ et PQ, dont le rapport $\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OF}}$ soit égal à $\frac{\cot \theta}{\cot \alpha}$; la ligne EF est parallèle à MQ.

Si la surface considérée est développable, la droite CQ est la trace horizontale du plan tangent, et par suite la droite MQ est la projection horizontale de la tangente.

Pour faire le développement d'un hélicoïde développable, il suffit de remarquer que l'arête de rebroussement ayant un rayon de courbure constant, la transformée de cette courbe est un cercle.

Le sujet du troisième Chapitre est la surface de la vis à filets triangulaires, qui est un hélicoïde gauche dans lequel la directrice rectiligne rencontre l'axe obliquement. L'hélice de striction se réduit à l'axe, et le paramètre des génératrices est égal et de signe contraire au pas réduit. Le cône directeur est de révolution.

Pour déterminer une surface de vis à filets triangulaires, il suffit de se donner une hélice et l'angle α que la génératrice fait avec un plan perpendiculaire à l'axe.

La trace de la surface sur un plan perpendiculaire à l'axe est une spirale d'Archimède.

Pour construire le plan tangent en un point de la surface, il suffit de déterminer la tangente à l'hélice qui passe par ce point, et de mener un plan par cette droite et par la génératrice. De cette construction on déduit la suivante : par la trace horizontale de l'axe et du côté où s'étend la spirale d'Archimède, on élève une perpendiculaire à la projection de la génératrice, égale à $h \cot \alpha$; la droite qui joint l'extrémité de cette perpendiculaire à la projection du point donné est perpendiculaire à la trace horizontale du plan tangent cherché.

Pour construire la courbe d'ombre dans le cas de rayons parallèles, par chaque génératrice on fait passer un plan parallèle aux rayons lumineux, et on détermine le point de contact par la méthode précédente. M. Poncelet a simplifié cette construction en remarquant que la droite qui donne la projection horizontale du point de contact passe par un point fixe. M. de la Gournerie a modifié cette construction de manière à obtenir un tracé plus rapide et plus exact.

Dans le cas de rayons divergents, on fait passer des plans par le point lumineux et les diverses génératrices, et on détermine les points de contact.

Les tangentes et les asymptotes des courbes d'ombre se déterminent à l'aide du theorème des tangentes conjuguées, qui conduit, dans ce cas, à une construction facile, car l'une des asymptotes de l'indicatrice est la génératrice elle-même, et l'autre se déduit aisément de la proposition suivante :

Quelle que soit la génératrice que l'on considère, si on élève à sa projection horizontale une perpendiculaire égale à $2h \cot \alpha$, *par le pied de l'axe et du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle est sa trace, l'extrémité de cette droite appartient aux projections horizontales des secondes asymptotes des indicatrices des différents points de cette génératrice.*

Comme application de ces théories, M. de la Gournerie donne la construction des ombres d'une vis à filets triangulaires et de son écrou. Il termine ce Chapitre en faisant voir que dans certains cas la surface de la vis à filets triangulaires peut être employée comme surface de raccordement. Il donne comme exemple la surface gauche lieu des normales à un cône de révolution, menées par les divers points d'une section plane de cette surface.

Le quatrième Chapitre contient la théorie de la surface de la vis à filets carrés, c'est-à-dire de la surface engendrée par le mouvement hélicoïdal d'une droite autour d'un axe qu'elle rencontre à angle droit. Cet hélicoïde est tout à la fois une variété de la surface de la vis à filets triangulaires et un conoïde droit. On peut y tracer des hélices, dites hélices excentriques, qui résultent de l'intersection de la surface par des cylindres de révolution dont une des génératrices coïncide avec l'axe de la surface.

Pour déterminer une surface de vis à filets carrés, il suffit de se donner l'axe et une hélice directrice. Le plan tangent en un point quelconque se détermine à l'aide d'un paraboloïde de raccordement. Les sections planes s'obtiennent en prenant les points de rencontre d'un certain nombre de génératrices avec le plan sécant. On construit les courbes d'ombre en faisant passer des plans lumineux par les génératrices et déterminant les points de contact. Dans le cas de rayons parallèles, la courbe d'ombre est une hélice excentrique.

La surface de la vis à filets carrés est la seule surface gauche dont les rayons de courbure soient, en chaque point, égaux et de signes contraires.

Le cinquième Chapitre est consacré aux surfaces hélicoïdes non réglées.

Une surface de ce genre est donnée par son axe, par son pas et par une directrice curviligne. On détermine l'intersection de la surface par un plan, en prenant les traces, sur ce plan, d'un nombre suffisant d'hélices. Les plans tangents et les lignes d'ombre se construisent à l'aide des surfaces de vis à filets triangulaires de raccordement, engendrées par les tangentes de la courbe méridienne.

Si l'on considère un axe fixe OZ, une courbe AB située dans un plan passant par cet axe, un point M de cette courbe, et les différentes surfaces hélicoïdales que peut engendrer la courbe AB en se mouvant autour de l'axe OZ, les asymptotes des indicatrices de ces surfaces correspondant au point M forment un cône du second degré. Ce cône, dont la considération est due à M. de la Gournerie, est symétrique par rapport au plan ZOM; l'une de ses génératrices est parallèle à l'axe, les asymptotes de l'indicatrice de la surface de révolution engendrée par AB sont deux autres génératrices de ce cône. Il est en outre facile de trouver un plan qui coupe ce cône suivant une ellipse dont la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe soit un cercle. Dès lors, on peut aisément trouver l'intersection de ce cône par un plan quelconque, ce qui permet de déterminer l'indicatrice d'une quelconque des surfaces hélicoïdales produites par le déplacement de AB autour de OZ.

Le dernier Livre, relatif aux surfaces topographiques, se compose de deux Chapitres.

Le premier contient les solutions des principaux problèmes relatifs à ces surfaces, résolus par la méthode des projections cotées.

Dans le second Chapitre, M. de la Gournerie fait voir comment un tableau graphique peut représenter une table numérique à double entrée. Dans certains cas, au lieu de construire la figure qui correspond à la formule donnée, on construit celle qui correspond à la formule obtenue en prenant des variables auxiliaires. Cette nouvelle figure est dite l'*anamorphose* de la première.

On voit par cette analyse que le nouvel ouvrage de M. de la Gournerie est un grand et beau travail, où l'on trouve les théories les plus nouvelles et les plus intéressantes. Aussi nous conseillons la lecture de ce traité, non-seulement aux personnes qui s'occupent spécialement de Géométrie descriptive, mais à tous ceux qui étudient la Géométrie de l'espace; ils y trouveront les découvertes les plus récentes exposées avec la plus grande clarté.

M. de la Gournerie a le plus grand soin de citer les géomètres qui se sont avant lui occupés du même sujet, et d'indiquer les sources où il a puisé. Aussi, nous nous sommes fait un devoir de signaler les parties de l'ouvrage qui sont le résultat des recherches personnelles de M. de la Gournerie. Si nous avons fait quelques omissions, elles sont tout à fait involontaires.

Enfin, un point très-important, et auquel M. de la Gournerie a donné toute son attention, ce sont les constructions graphiques; il a toujours choisi les plus simples et les plus exactes au point de vue de l'exécution, et les épures qui accompagnent le texte sont de véritables modèles de l'art du trait.

L. Gros.

V.

Mécanique rationnelle; par *P.-J.-E. Finck*, professeur, chevalier de la Légion d'honneur.

La première Partie comprend la *Cinématique pure;* la deuxième, la *Mécanique du point matériel;* la troisième, la *Mécanique des corps.*

Il sera rendu compte de cet ouvrage.