NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DIEU

Note sur les équations qui contiennent des fonctions linéaires de coordonnées rectilignes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 165-168

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__165_1>

NOTE

sur les équations qui contiennent des fonctions linéaires de coordonnées rectilignes;

PAR M. DIEU,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

On discute les équations où il n'entre que trois fonctions de la forme $ax + by + cz + d$, comme si ces fonctions étaient de simples coordonnées. Cela peut s'étendre à des équations contenant des fonctions de cette espèce en nombre quelconque.

Soit

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

l'équation proposée, $X_1, X_2, \ldots$ désignant les fonctions linéaires

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2, \ldots.$$

1. Supposons d'abord que trois au moins des plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots,$$

passent par un même point. Si

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$$

remplissent cette condition, on aura

$$X_4 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \delta,$$
$$X_5 = \alpha' X_1 + \beta' X_2 + \gamma' X_3 + \delta',$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots$$

quels que soient x, y, z, en prenant pour α, $\beta, \ldots$, α', $\beta', \ldots$ la solution des équations

$$a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = a_4,$$
$$b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma = b_4,$$
$$c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma = c_4,$$
$$\delta = d_4 - d_1\alpha - d_2\beta - d_3\gamma,$$

et celles des systèmes qui se déduisent de celui-ci par le changement de a_4, b_4, c_4, d_4 en a_5, b_5, c_5, d_5, etc.

Tous ces systèmes sont possibles et à solution unique, car le déterminant des trois premières équations de chacun, dont la quatrième seulement contient δ, $\delta', \ldots$ ou $\delta^{(n-4)}$, est précisément le déterminant des équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0,$$

lequel diffère de zéro d'après l'hypothèse faite sur les plans que ces équations représentent.

Il est clair que la substitution a $X_4, \ldots, X_n$ de leurs expressions en X_1, X_2, X_3 conduira à une équation ne contenant plus que ces trois fonctions.

II. Supposons à présent que parmi les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots,$$

il ne s'en trouve pas trois qui passent par un même point, mais que deux au moins de ces plans ne soient pas parallèles. Si les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0$$

se coupent, un des autres plans sera parallèle à l'un ou à l'autre, ou bien les coupera tous deux suivant des droites parallèles à leur intersection.

Dans le premier de ces deux cas, c'est-à-dire quand $X_3 = o$ sera parallèle à $X_1 = o$, par exemple, on aura évidemment, quels que soient x, y, z,

$$X_3 = \alpha X_1 + \beta$$

pour de certaines valeurs de α, β.

Lorsque $X_3 = o$ coupera $X_1 = o$ et $X_2 = o$, on aura

$$X_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma,$$

quels que soient x, y, z, en prenant pour α, β la solution des équations

$$a_1\alpha + a_2\beta = a_3,$$
$$b_1\alpha + b_2\beta = b_3,$$

et pour γ la valeur

$$\gamma = d_3 - d_1\alpha - d_2\beta,$$

si l'on a

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 \gtrless o.$$

Dans ce cas, en effet, l'hypothèse sur les plans

$$X_1 = o, \quad X_2 = o, \quad X_3 = o$$

conduit à

$$\frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 c_3 - c_1 a_3} = \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{b_1 c_3 - c_1 b_3},$$

d'où il suit que les valeurs en question de α, β satisfont à la condition d'identité qui reste, savoir :

$$c_1\alpha + c_2\beta = c_3.$$

Si l'on a

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = o,$$

on doit avoir aussi

$$a_1 b_3 - b_1 a_3 = o,$$

car l'intersection des deux premiers plans étant parallèle au plan xy, il doit en être de même de l'intersection du premier et du troisième ; les équations

$$a_1\alpha + a_2\beta = a_3, \quad b_1\alpha + b_2\beta = b_3$$

se réduisent donc à une seule. Mais alors on a

$$a_1c_2 - c_1a_2 \gtrless 0,$$

car sans cela les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0$$

seraient parallèles ; α et β seront donc déterminés par les équations

$$a_1\alpha + a_2\beta = a_3,$$
$$c_1\alpha + c_2\beta = c_3.$$

Les mêmes raisonnements s'appliquent à X_4, $X_5, \ldots$; ainsi l'équation proposée se ramènera à une autre ne contenant que X_1, X_2.

Enfin, on voit que si tous les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots,$$

étaient parallèles entre eux, on aurait

$$X_2 = \alpha X_1 + \beta, \quad X_3 = \alpha' X_1 + \beta', \ldots,$$

en sorte qu'on arriverait à une équation ne contenant que X_1.