NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V.-A. LE BESGUE

Sur les cercles bitangents à une conique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 161-165

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__161_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES CERCLES BITANGENTS A UNE CONIQUE;

PAR M. V.-A. LE BESGUE.

La considération des cercles bitangents à une conique conduit très-brièvement à la détermination des axes principaux en grandeur et en direction, et par suite à celle des foyers, sans qu'il soit besoin d'employer une définition analytique qui introduit les imaginaires sans avantages apparents.

Soit

$$(1)\qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

l'équation d'une conique rapportée à des axes faisant l'angle θ.

Soit

$$(2)\qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = 1$$

l'équation d'un cercle de même centre. En égalant les dérivées de y fonction de x, prises dans les deux équations, on a

$$(3)\qquad \frac{x + y\cos\theta}{x\cos\theta + y} = \frac{Ax + By}{Bx + Cy},$$

ce qui revient à

$$(4)\quad (C\cos\theta - B)y^2 - (A - C)xy - (A\cos\theta - B)x^2 = 0.$$

Cette équation homogène est satisfaite par les coordonnées des foyers et des sommets qui sont situés sur un même axe.

Si l'on pose $y = tx$, on a l'équation

$$(5)\quad (C\cos\theta - B)t^2 - (A - C)t - (A\cos\theta - B) = 0.$$

C'est l'équation aux directions des axes principaux. Ces deux racines étant t et t', on vérifie immédiatement la condition

$$1 + (t + t')\cos\theta + tt' = 0,$$

qui montre que les deux directions sont perpendiculaires.

La résolution donne

$$2(C\cos\theta - B)t - (A - C)$$
$$= \pm\sqrt{(A - C)^2 + 4(A\cos\theta - B)(C\cos\theta - B)}.$$

En remplaçant $(A - C)^2$ par $(A - C)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$, on a pour valeur du radical

$$\sqrt{(A - C)^2\sin^2\theta + [(A + C)\cos\theta - 2B]^2},$$

quantité toujours réelle.

Le moyen le plus simple pour trouver le carré r^2 d'un demi-axe principal, c'est d'écrire l'équation (3) sous la forme

$$\frac{x + y\cos\theta}{Ax + By} = \frac{x\cos\theta + y}{Bx + Cy} = \frac{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = r^2,$$

la troisième expression s'obtenant en multipliant par x les deux termes de la première fraction, par y les deux termes de la seconde, et ajoutant ces fractions terme à terme, méthode que Cauchy employait souvent.

L'équation multiple précédente conduit aux deux suivantes :

$$(Br^2 - \cos\theta)x = (1 - Cr^2)y, \quad (Br^2 - \cos\theta)y = (1 - Ar^2)x;$$

la multiplication membre à membre donne

$$(Br^2 - \cos\theta)^2 = (1 - Ar^2)(1 - Cr^2)$$

ou, réduction faite,

$$(6) \quad (AC - B^2)r^4 - (A + C - 2B\cos\theta)r^2 + \sin^2\theta = 0.$$

Il est à remarquer que la résolution donne

$$r^2 = \frac{A + C - 2B\cos\theta \pm \sqrt{(A + C - 2B\cos\theta)^2 - 4(AC - B^2)\sin\theta}}{2(AC - B^2)}.$$

Si l'on développe le carré et que l'on remplace $(A + C)^2$ par $(A + C)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$, on trouve encore le radical

$$\sqrt{(A - C)^2\sin^2\theta + [(A + C)\cos\theta - 2B]^2}.$$

On peut remarquer, en passant, que pour $B = 0$ l'équation (6) devient

$$r^4 - \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C}\right)r^2 + \frac{\sin^2\theta}{AC} = 0,$$

d'où résultent immédiatement les deux théorèmes d'Apollonius.

L'équation (6) donne pour différence des deux valeurs de r^2, différence qui devient une somme dans le cas de l'hyperbole,

$$\frac{\sqrt{(A - C)^2\sin^2\theta + [(A + C)\cos\theta - 2B]^2}}{AC - B^2}:$$

c'est précisément le carré de la distance d'un foyer au centre. On a donc

$$\begin{aligned}&(AC - B^2)(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2)\\ &\quad = \sqrt{(A - C)^2\sin^2\theta + [(A + C)\cos\theta - 2B]^2},\end{aligned}$$

ou encore, en remplaçant le radical par sa valeur donnée plus haut,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}&(AC - B^2)xy(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2)\\ &= \pm[(C\cos\theta - B)y^2 + (A\cos\theta - B)x^2],\end{aligned}\right.$$

seconde relation entre les coordonnées des foyers.

Si dans l'équation (1) A, B, C étaient fonctions d'une variable m, en éliminant cette variable au moyen des équations (4) et (7) on aurait le lieu des foyers.

Soit proposé comme application de trouver le lieu des foyers des coniques ayant pour équation

$$\frac{mx^2}{a} + \frac{y^2}{b} = \frac{am+b}{4},$$

ou, en remplaçant a et b par $2a$ et $2b$,

$$\frac{bm}{ab(am+b)}x^2 + \frac{a}{ab(am+b)}y^2 = 1,$$

et supposant d'ailleurs que les axes des coordonnées font l'angle θ.

L'équation (4), où l'on fera $B = 0$, donnera d'abord

$$\frac{A}{C} = \frac{y(y\cos\theta + x)}{x(x\cos\theta + y)},$$

et par suite

$$m = \frac{a}{b}\cdot\frac{y(y\cos\theta + x)}{x(x\cos\theta + y)};$$

puis, l'équation (7) devenant

$$ACxy(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) = \pm(Cy^2 + Ax^2)\cos\theta,$$

donnera, par la substitution des valeurs de A et C, et en supprimant le facteur $x^2 + 2xy\cos\theta + y^2$ commun aux deux membres,

$$xy(x\cos\theta + y)(y\cos\theta + x)$$
$$= \pm\cos^2\theta\left(a^2y^2 + \frac{a^2+b^2}{\cos\theta}xy + b^2x^2\right),$$

c'est-à-dire, au double signe près, l'équation donnée à la page 362 du tome III (2e série) des *Nouvelles Annales*.

Il est à remarquer que cette équation est du troisième degré en x et y; en se donnant x, y prendra une valeur réelle, quel que soit le signe adopté : de là une valeur réelle pour m, de sorte que les équations (4) et (7) se trouveront satisfaites.

Il serait bon d'examiner si la définition du foyer (un cercle de rayon nul, etc.) peut donner les deux signes, bien qu'un seul se trouve dans la solution qu'a donnée de ce problème un de nos savants professeurs.