NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Analogies de la géométrie du plan à celle de l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 145-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__145_0>

ANALOGIES DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN A CELLE DE L'ESPACE;

PAR M. PAUL SERRET.

Les problèmes qui font l'objet de cet article reçoivent un double intérêt des difficultés analytiques qu'ils présentent et de leur construction géométrique jusqu'ici inachevée. On connaît depuis longtemps cette analogie, dont le premier terme est dû à Newton : « Le lieu des centres des ellipses inscrites à un quadrilatère étant une droite, le lieu des centres des ellipsoïdes inscrits à un système de sept plans est un plan »; et cette autre, due pour la première moitié à Steiner, pour la seconde à M. Mention : « Le lieu des centres des ellipses, inscrites à un triangle et dont la somme des carrés des axes demeure constante, étant un cercle; le lieu des centres des ellipsoïdes inscrits à un système de six plans, et dont la somme des carrés des axes est constante, est une sphère ». Il restait à compléter ces analogies; et, comme on sait construire dans le plan la droite ou le cercle des centres, à construire aussi dans l'espace le plan ou la sphère des centres, à l'aide des plans donnés. Question difficile, dont une solution imprévue pouvait naître, sans doute, de la Géométrie, ou du hasard; mais qui paraissait se dérober au calcul. Si l'on aborde, en effet, par la voie analytique ordinaire, la détermination de l'un quelconque des lieux géométriques précédents, on se trouve, dès le début, en présence d'éliminations à peu près irréalisables. Et bien que l'on puisse en venir à bout à l'aide de certaines relations dites d'identité, calculées d'abord par M. Terquem pour les courbes du second ordre, par M. Mention pour les surfaces; l'extrême complication des calculs permet seulement de reconnaître, dans chaque cas, la nature du lieu. C'est ainsi que M. Mention a pu constater l'existence d'une sphère des centres, analogue au cercle de Steiner; mais sans apercevoir la position du centre de cette sphère par rapport aux six plans donnés.

On peut traiter tous ces problèmes par une méthode directe, n'exigeant que très-peu de calcul et prenant son point de départ dans l'interprétation géométrique des équations de la tangente à l'ellipse, ou du plan tangent à l'ellipsoïde, rapportés à leurs axes de figure; équations bien connues et que l'on peut transporter ensuite à des axes quelconques. On est ainsi conduit, pour les lieux analogues de la Géométrie des courbes et des surfaces du second ordre, à des équations de même forme, telles que

$$\sum_1^4 \lambda P^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^7 \lambda P^2 = 0,$$

ou encore

$$\sum_1^3 \lambda P^2 = a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad \sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Et cette similitude, déjà remarquable par elle-même, présente en outre ici cet avantage, que les considérations à l'aide desquelles on peut, dans le plan, déduire de la seule forme de son équation la position du lieu des centres par rapport aux données géométriques de la question, se trouvent naturellement indiquées comme devant être essayées aussi quand on aura à étudier la position du lieu correspondant de l'espace. Or, il arrive que cet essai réussit; et que ces mêmes considérations suffisent pour faire apparaître tous les détails de position, essentiels ici, qui paraissaient d'abord cachés dans l'équation du lieu. On parvient de la sorte à une première solution de ce problème : *Construire le centre de l'ellipsoïde défini par neuf plans tangents.*

I.

1. L'ellipse $(2a, 2b)$ étant rapportée à ses axes de figure, l'une quelconque de ses tangentes peut être représentée par l'équation connue

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \mathrm{P} = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}:$$

α désignant l'inclinaison sur l'axe $2a$ de la normale correspondante N, et $\mathrm{P} = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}$ la distance du centre de l'ellipse à la tangente. Traduisant cette valeur de P en langage ordinaire, on peut dire que *le carré de la distance du centre de l'ellipse à l'une quelconque de ses tangentes est égal à la somme des carrés des produits de chacun des demi-axes de la courbe par le cosinus de l'angle formé par la direction de cet axe avec la normale correspondante* N :

$$\mathrm{P}^2 = a^2\cos^2(\mathrm{N}, a) + b^2\cos^2(\mathrm{N}, b);$$

et cette formule est ensuite applicable, comme nous allons le voir, à un système quelconque d'axes coordonnés.

2. *Du lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère donné.* — Soient, par rapport à un système quelconque d'axes rectangulaires,

$$o = \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_4,$$

les quatre côtés du quadrilatère donné; chacune des fonctions P étant de la forme

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y - p,$$

où A et B désignent les cosinus des angles formés avec ox et oy par la normale N à la droite correspondante, ou les *cosinus directeurs* de cette normale.

Si l'on désigne de même par α et β, α' et β' les cosinus directeurs de chacun des axes $2a$ ou $2b$ d'une ellipse tangente aux quatre droites; on aura, pour le carré de la distance du centre (xy) de cette ellipse à chacune de ces droites, cette double expression :

$$P^2 = (Ax + By - p)^2 = a^2\cos^2(N, a) + b^2\cos^2(N, b),$$

ou, en développant les cosinus.

$$P^2 = (Ax + By - p)^2 = a^2(A\alpha + B\beta)^2 + b^2(A\alpha' + B\beta')^2.$$

Appliquant cette relation à chacune des quatre tangentes données, il vient :

$$1^\circ\ P_1^2 = (A_1x + B_1y - p_1)^2 = a^2(A_1\alpha + B_1\beta)^2 + b^2(A_1\alpha' + B_1\beta')^2,$$
$$2^\circ\ P_2^2 = (A_2x + B_2y - p_2)^2 = a^2(A_2\alpha + B_2\beta)^2 + b^2(A_2\alpha' + B_2\beta')^2,$$
$$3^\circ\ P_3^2 = (A_3x + B_3y - p_3)^2 = a^2(A_3\alpha + B_3\beta)^2 + b^2(A_3\alpha' + B_3\beta')^2,$$
$$4^\circ\ P_4^2 = (A_4x + B_4y - p_4)^2 = a^2(A_4\alpha + B_4\beta)^2 + b^2(A_4\alpha' + B_4\beta')^2,$$

et la détermination du lieu des centres est ramenée à l'élimination entre ces quatre équations des trois paramètres indépendants auxquels se réduisent les six variables $a, b, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Or, cette élimination se réalise aisément, en vertu d'un mode particulier de symétrie que présentent les équations 1°, 2°, 3°, 4° et d'après lequel les quantités

$$a^2\alpha^2 \text{ et } b^2\alpha'^2,\quad a^2\beta^2 \text{ et } b^2\beta'^2,\quad a^2\alpha\beta \text{ et } b^2\alpha'\beta'$$

entrant de la même manière dans toute combinaison de ces équations, il suffira de rendre nuls les coefficients des termes en

$$a^2\alpha^2,\quad 2a^2\alpha\beta,\quad b^2\beta^2$$

dans l'équation résultant de cette combinaison, pour voir disparaître toutes les variables.

Si l'on désigne, dès lors, par λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 quatre coefficients indéterminés dont les rapports soient définis par les relations suivantes :

$$(\lambda)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \lambda_3 A_3^2 + \lambda_4 A_4^2 &= 0,\\ \lambda_1 B_1^2 + \lambda_2 B_2^2 + \lambda_3 B_3^2 + \lambda_4 B_4^2 &= 0,\\ \lambda_1 A_1 B_1 + \lambda_2 A_2 B_2 + \lambda_3 A_3 B_3 + \lambda_4 A_4 B_4 &= 0,\end{aligned}\right.$$

et qu'ayant multiplié les équations 1°, 2°, 3°, 4° respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, on les ajoute membre à membre : le second membre de l'équation résultante sera identiquement nul, en vertu des relations (λ) ; tous les paramètres variables se trouveront éliminés, et l'équation du lieu sera

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 (A_1 x + B_1 y - p_1)^2 + \lambda_2 (A_2 x + B_2 y - p_2)^2\\ &\quad + \lambda_3 (A_3 x + \ldots)^2 + \lambda_4 (A_4 x + \ldots)^2 = 0,\\ &\qquad\text{ou}\quad \sum_1^4 \lambda P^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, et en vertu des mêmes relations (λ), les termes en x^2, y^2, xy disparaissent d'eux-mêmes du premier membre de cette équation qui représente, dès lors, une droite ; et l'on a ce théorème :

Quatre droites étant données

$$o = P_1 = P_2 = P_3 = P_4,$$

le lieu des centres des coniques tangentes à ces quatre droites est la droite unique représentée par l'équation

$$(1)\qquad \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2 = 0,$$

rendue linéaire en x, y, par un choix convenable des coefficients.

Remarque I. — Quels que soient l'angle des axes et la forme des fonctions P, la droite des centres demeure représentée par l'équation (1); ou, en choisissant deux des quatre droites données pour axes des x et des y, par celle-ci :

$$(1') \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 + \lambda'\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1\right)^2 = 0,$$

les coefficients α, β, λ, λ' étant toujours choisis de manière à produire la disparition des termes en x^2, y^2 et xy. Il serait donc facile de vérifier, conformément au théorème de Newton, que la *ligne des centres* se confond avec la *droite des milieux des diagonales* du quadrilatère formé par les quatre tangentes. Mais cette vérification est, en réalité, inutile; et la position de la droite des centres est én évidence dans l'équation (1).

Remarquons, en effet, la ligne (1) étant traitée comme une courbe du second ordre, que la polaire, prise par rapport à cette ligne, d'un point quelconque (p_1, p_2, p_3, p_4), est représentée par l'équation

$$\lambda_1 p_1 . P_1 + \lambda_2 p_2 . P_2 + \lambda_3 p_3 . P_3 + \lambda_4 p_4 . P_4 = 0,$$

et que cette équation se réduit, par l'hypothèse $o = p_1 = p_2$, à

$$\lambda_3 p_3 . P_3 + \lambda_4 p_4 . P_4 = 0.$$

De là cette conclusion : *La polaire*, prise par rapport à la ligne des centres de *l'un quelconque des sommets* du quadrilatère formé par les quatre tangentes $(o = p_1 = p_2)$, *passe par le sommet opposé* $(o = P_3 = P_4)$.

Or, dans toute courbe du second ordre, les rayons menés du pôle à la polaire sont divisés harmoniquement par la courbe; et, si celle-ci se réduit à une droite D, ou au système formé de cette droite D et de la *droite à l'infini*, les rayons menés du pôle à la polaire sont divisés en deux parties égales par cette droite D. Il résulte de là, en revenant au quadrilatère précédent, que le rayon mené de chaque sommet au sommet opposé est divisé en deux parties égales par la droite des centres : ou que celle-ci coïncide avec la droite des milieux des diagonales du quadrilatère.

La propriété dont nous venons de faire usage, des *pôles et polaires par rapport à une droite*, résulterait encore de la triple substitution

$$o = a = b = c$$

introduite dans les équations

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$
$$(ax' + by' + d)x + (bx' + cy' + e)y + (dx' + ey' + f) = 0,$$

d'une courbe du second ordre et de la polaire d'un point (x', y') par rapport à cette courbe.

Remarque II. — Une conique étant définie par les cinq tangentes

$$o = P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5,$$

l'équation

$$\sum_1^5 \lambda P^2 = 0,$$

rendue linéaire à l'aide des coefficients, représente le faisceau des diamètres de cette conique.

3. *Du lieu des centres des coniques inscrites à un triangle et dont la somme des carrés des axes est assujettie à demeurer constante.* — Les côtés du triangle étant représentés par les équations

$$o = P_1 = P_2 = P_3,$$

et toutes les notations du numéro précédent conservées, la détermination du lieu des centres dépendra de l'élimination des trois paramètres indépendants, auxquels se réduisent les six variables a, b, α, β, α', β' entre ces quatre équations :

$$1^\circ\quad P_1^2=(A_1x+B_1y-p_1)^2=a^2(A_1\alpha+B_1\beta)^2+b^2(A_1\alpha'+B_1\beta')^2,$$
$$2^\circ\quad P_2^2=(A_2x+B_2y-p_2)^2=a^2(A_2\alpha+B_2\beta)^2+b^2(A_2\alpha'+B_2\beta')^2,$$
$$3^\circ\quad P_3^2=(A_3x+B_3y-p_3)^2=a^2(A_3\alpha+B_3\beta)^2+b^2(A_3\alpha'+B_3\beta')^2,$$
$$4^\circ\qquad a^2+b^2=k^2=\text{const.}$$

Or, si l'on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois coefficients définis par les conditions suivantes :

$$(\lambda)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_1A_1^2+\lambda_2A_2^2+\lambda_3A_3^2&=1,\\ \lambda_1B_1^2+\lambda_2B_2^2+\lambda_3B_3^2&=1,\\ \lambda_1A_1B_1+\lambda_2A_2B_2+\lambda_3A_3B_3&=0,\end{aligned}\right.$$

et que, multipliant les équations 1, 2, 3 respectivement par les nombres actuellement déterminés λ_1, λ_2, λ_3, on les ajoute membre à membre : le second membre de l'équation résultante se réduit, en vertu des relations (λ), à

$$(a^2\alpha^2+a^2\beta^2)+(b^2\alpha'^2+b^2\beta'^2)=a^2(\alpha^2+\beta^2)+b^2(\alpha'^2+\beta'^2)=a^2+b^2;$$

toutes les variables se trouvent éliminées, et l'équation du lieu est

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1(A_1x+B_1y-p_1)^2+\lambda_2(A_2x+B_2y-p_2)^2\\ &\quad+\lambda_3(A_3x+B_3y-p_3)^2=a^2+b^2=\text{const.},\\ &\quad\text{ou}\quad \sum_1^3\lambda P^2=a^2+b^2=\text{const.}\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, les termes du second degré de cette équation se réduisant, en vertu des mêmes relations (λ), à x^2+y^2, le lieu considéré est un cercle, et l'on a ce théorème :

Étant données trois droites

$$o=P_1=P_2=P_3,$$

le lieu des centres des coniques tangentes à ces droites, et dont la somme des carrés des axes demeure constante, est le cercle unique représenté par l'équation

$$(2) \qquad \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 = a^2 + b^2 = \text{const.},$$

réduite à la forme circulaire $x^2 + y^2 + \ldots$ *par un choix convenable des coefficients.*

Remarque I. — L'angle des axes devenant quelconque, l'équation précédente est encore applicable. On pourra donc prendre pour axes des x, y deux des trois tangentes données; et le lieu des centres demeurera représenté par l'équation

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \lambda\left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1\right)^2 = a^2 + b^2,$$

ramenée toujours à la forme $x^2 + y^2 + 2xy\cos(x,y) + \ldots$ par un choix convenable des coefficients. La détermination du *centre* du cercle en résulterait aisément; et l'on vérifierait, conformément au théorème de Steiner, qu'il coïncide avec le *point de rencontre des hauteurs* du triangle formé par les trois tangentes données. Mais cette vérification serait ici superflue, la position du centre étant en évidence dans l'équation (2) : aussitôt, du moins, que l'on y suppose nulle la constante $a^2 + b^2$, ce qui ne change rien à la position du point que l'on cherche.

Posons, en effet,

$$a^2 + b^2 = 0;$$

l'équation (2) prend la forme homogène

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 = 0.$$

Or, il résulte immédiatement de cette forme que le triangle

$$0 = P_1 = P_2 = P_3$$

est polairement conjugué à la courbe représentée par cette équation : cette courbe, d'ailleurs, est un cercle; le centre de ce cercle coïncide donc avec le point de rencontre des hauteurs de ce triangle.

Remarque II. — Le lieu des centres des hyperboles équilatères

$$a^2 - b^2 = 0$$

inscrites à un triangle, est le cercle conjugué de ce triangle : ce cercle, d'ailleurs, est réel, se réduit à un point, ou devient imaginaire, suivant que le triangle proposé est obtusangle, rectangle, ou acutangle.

Remarque III. — Les centres des hyperboles équilatères définies par quatre tangentes appartiennent à chacun des quatre cercles conjugués aux triangles formés de trois de ces tangentes. Ces quatre cercles se coupent dans les deux mêmes points, centres de deux hyperboles répondant à la question; et la droite qui les réunit se confond avec la droite des milieux des diagonales du quadrilatère formé par les quatre tangentes.

Remarque IV. — Le théorème de Newton peut être considéré comme une conséquence du théorème de Steiner. Si l'on désigne, en effet, par $a^2 + b^2$ la somme des carrés des axes de l'une quelconque des coniques tangentes aux quatre droites $o = P_1 = P_2 = P_3 = P_4$, le centre de cette conique appartenant, d'après ce dernier théorème, à chacun des deux *cercles*

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 = a^2 + b^2,$$
$$\mu_2 P_2^2 + \mu_3 P_3^2 + \mu_4 P_4^2 = a^2 + b^2,$$

appartiendra aussi à leur *axe radical* représenté par l'équation

$$\lambda_1 P_1^2 + (\lambda_2 - \mu_2) P_2^2 + (\lambda_3 - \mu_3) P_3^2 - \mu_4 P_4^2 = 0,$$

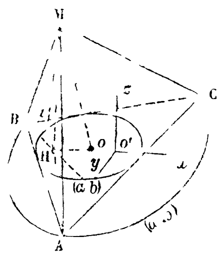
ou

$$\lambda'_1 P_1^2 + \lambda'_2 P_2^2 + \lambda'_3 P_3^2 + \lambda'_4 P_4^2 = 0,$$

et le lieu des centres n'est autre que la *droite unique et déterminée* représentée par cette équation.

Remarque V. — Le théorème de Steiner admet cette autre démonstration, indirecte, puisqu'elle est fondée sur des considérations empruntées de la Géométrie de l'espace, mais tellement simple, que nous croyons pouvoir nous y arrêter un moment.

On sait, suivant le théorème de Monge, que le lieu décrit par le sommet d'un trièdre trirectangle circonscrit à



l'ellipsoïde est une sphère concentrique, dont le rayon est égal à la racine carrée de la somme des carrés des demi-axes de l'ellipsoïde : $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Or, si le troisième axe $2c$ de l'ellipsoïde diminue graduellement et tend vers zéro, le théorème subsiste toujours et se transforme, à la limite, en celui-ci : *Le lieu décrit par le sommet d'un trièdre trirectangle circonscrit à l'ellipse est une sphère concentrique dont le rayon est égal à la racine carrée de la somme des carrés des demi-axes de l'ellipse* : $R = \sqrt{a^2 + b^2}$. C'est, d'ailleurs, ce que l'on vérifierait, par un calcul direct, en formant l'équation d'un cône quelconque mené suivant la courbe :

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et déterminant la position du sommet de ce cône par la condition que trois de ses plans tangents forment un trièdre trirectangle. La somme des carrés des axes d'une ellipse est donc représentée géométriquement par le carré de la distance du centre de la courbe au sommet de l'un quelconque des trièdres trirectangles circonscrits. Si l'on cherche, dès lors, le lieu des centres o des ellipses inscrites au triangle donné ABC et dont la somme des carrés des axes est assujettie à demeurer constante; on verra, le triangle circonscrit ABC étant donné, qu'il en est de même du sommet M du trièdre trirectangle construit sur ce triangle comme base; que la distance $Mo = \sqrt{a^2 + b^2}$ est donnée, et que le centre o de l'ellipse inscrite décrit un cercle ayant pour centre la projection du sommet fixe M sur le plan ABC, ou le point de rencontre H des hauteurs du triangle ABC : ce qui est la partie essentielle du théorème de Steiner.

La somme des carrés des axes d'une ellipse inscrite à un triangle est d'ailleurs susceptible d'une autre représentation. De l'égalité $a^2 + b^2 = \overline{oM}^2$, on déduit, en effet,

$$a^2 + b^2 = \overline{oH}^2 + \overline{HM}^2;$$

ou, en remarquant que le triangle aMA est rectangle en M, et que les segments Ha, HA sont, dans la figure, de sens opposés ou de signes contraires,

$$a^2 + b^2 = \overline{oH}^2 - Ha \,.\, HA = \overline{oH}^2 - \beta^2;$$

β désignant le rayon, imaginaire dans la figure, du cercle conjugué du triangle ABC. Or, le centre de ce cercle étant le point H lui-même, la relation

$$a^2 + b^2 = \overline{oH}^2 - \beta^2,$$

exprime que *la somme des carrés des axes d'une ellipse inscrite à un triangle* est mesurée par *la puissance du centre de la courbe par rapport au cercle conjugué du triangle*. Et c'est ce qui résulte immédiatement de l'équation (2).

Remarque VI. — L'ellipse précédente, de centre o, inscrite au triangle ABC, étant projetée sur le plan de chacune des faces latérales du trièdre trirectangle MABC, donne naissance à trois ellipses, inscrites à chacun des triangles rectangles AMB, BMC, CMA, ayant respectivement pour centre la projection du centre primitif o sur le plan de chacune des faces, et dont la somme des carrés des axes est mesurée par le carré de la distance de cette projection au sommet M. De là, en désignant par x, y, z les coordonnées du centre primitif o par rapport au trièdre M; par a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 les demi-axes des trois ellipses secondaires, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= x^2 + y^2, \\ a_2^2 + b_2^2 &= y^2 + z, \\ a_3^2 + b_3^2 &= z^2 + x^2; \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2) = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(a^2 + b^2),$$

relation élégante, que l'on doit à M. Prouhet, mais qui n'avait pas été établie d'une manière aussi simple.

Remarque VII. — Le théorème de Monge, appliqué à l'ellipse, conduit encore aisément à la solution de ce problème : Un triangle variable ABC demeurant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes (a', b'), (a, b), trouver le lieu décrit par le point de rencontre H des hauteurs de ce triangle (Burnside-Salmon).

Conservant, en effet, la figure et les notations précédentes, on a d'abord

$$\overline{o\mathrm{H}}^2 + \overline{\mathrm{HM}}^2 = a^2 + b^2;$$

ou, en appelant x, y et α, β les coordonnées, relatives à un même système d'axes, du point de rencontre des hauteurs du triangle et du centre o de l'ellipse inscrite,

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = a^2 + b^2,$$

a et b désignant, en outre, les axes principaux de l'ellipse inscrite ; et x, y, z les coordonnées du sommet du trièdre trirectangle construit sur ABC comme base.

D'un autre côté, si l'on désigne par a', b' les demi-axes de l'ellipse circonscrite au triangle ABC, et que l'on cherche le lieu des sommets des trièdres trirectangles inscrits à cette ellipse, ou le lieu des sommets des cônes s'appuyant sur l'ellipse (a', b') et ayant trois de leurs génératrices rectangulaires ; on trouve, pour équation de ce lieu,

$$(2) \qquad \left(\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1\right) + z^2\left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}\right) = 0,$$

les axes des x, y, indéterminés jusqu'ici, étant maintenant les axes mêmes de l'ellipse (a', b').

Le sommet xyz du trièdre trirectangle construit sur le triangle variable ABC décrit donc dans l'espace la courbe d'intersection des surfaces (1) et (2) ; et l'équation de la courbe décrite par sa projection (xy) sur le plan du triangle variable ABC, ou par le point de rencontre H des hauteurs de ce triangle, résultera de l'élimination de z

entre les équations (1) et (2). On obtient ainsi

$$(3)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}-1\right) \\ -[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(a^2+b^2)]\left(\dfrac{1}{a'^2}+\dfrac{1}{b'^2}\right)=0, \end{cases}$$

équation d'une conique, semblable à l'ellipse *circonscrite* au triangle mobile, dont les axes majeur et mineur sont respectivement perpendiculaires aux axes mineur et majeur de cette ellipse; et dont la forme et la position ne dépendent que de la *position* du centre de l'ellipse *inscrite* au triangle, et de la somme des carrés de ses axes.

(*La suite prochainement.*)