NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 141-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__141_0>

QUESTIONS.

724. Étant donnés un point quelconque o, et la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, le cône qui a pour sommet le point o et pour directrice la courbe donnée coupe la sphère suivant une deuxième courbe située, comme la première, sur une infinité de surfaces du second ordre.

Cela posé, on demande de démontrer que les axes de chacune de ces nouvelles surfaces sont parallèles aux normales que l'on peut mener en o aux trois *anallagmatiques* du quatrième ordre, passant par ce point, qui ont pour *focale* la courbe donnée. (MOUTARD.)

725. Résoudre algébriquement l'équation

$$[(x+2)^2+x^2]^3 = 8x^4(x+2).$$

(LEBASTEUR.)

726. Sur la surface lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes appartenant à un système homofocal, les trajectoires orthogonales de ces cercles sont des courbes dont chacune est une ligne de courbure de deux hyperboloïdes homofocaux avec les ellipsoïdes.

(STREBOR.)

727. Soit AB un diamètre d'un cercle et C le centre, et soit pris sur ce diamètre $CP = \frac{1}{3}AC$. Ayant tiré une droite quelconque par P rencontrant la circonférence en Q, R, menons les droites BR et QC, et soit S le point de rencontre de QC prolongé avec BR. En désignant

l'angle BSQ par ψ, et l'angle CBS par φ, il faut prouver que

$$\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi}=\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^3.$$

(STREBOR.)

728. Soient α, β, γ, δ, ε les racines de l'équation

$$x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0.$$

Si l'on a

$$(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2+(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2=0,$$

démontrer que la racine ε est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation. (MICHAEL ROBERTS.)

729. Les directions des axes de la section faite par le plan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\lambda,$$

dans la surface

$$\begin{gathered}Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy\\+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,\end{gathered}$$

sont données par les intersections du plan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$$

avec le cône

$$\begin{aligned}&(A\cos^2\beta+A'\cos^2\alpha-2B''\cos\alpha\cos\beta)(x^2\sin^2\beta-y^2\sin^2\alpha)\\+&(A\cos^2\gamma+A''\cos^2\alpha-2B'\cos\alpha\cos\gamma)(z^2\sin^2\alpha-x^2\sin^2\gamma)\\+&(A'\cos^2\gamma+A''\cos^2\beta-2B\cos\beta\cos\gamma)(y^2\sin^2\gamma-z^2\sin^2\beta)=0\end{aligned}$$

(J.-J.-A. MATHIEU.)

730. Supposons que s_0, $s_1,\ldots,$ représentent les sommes des puissances zéro, première,..., des racines

de l'équation

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} a_2 x^{n-2}$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a_3 x^{n-3} + \ldots = 0.$$

Si

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} < 0, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0,$$

alors

$$(n-3)a_0^2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2) - 6(n-2)(a_1^2 - a_0a_2)^2 > 0,$$

et toutes les racines de la dérivée de l'ordre $(n-4)$ de cette équation sont imaginaires.

(Michael Roberts.)

731. Démontrer qu'en éliminant f entre les équations

$$4(ae - 4bd + 3c^2)(bf - 4ce + 3d^2) - (af - 3be + 2cd)^2 = 0,$$

$$3[a^2(c^2 - df) + 3ab(cf - de) + 4ac(d^2 - ce)$$
$$+ 2b^2(d^2 - bf) + 5b^2ce + 3c^4 - 8bc^2d] - (ae - 4bd + 3c^2)^2 = 0,$$

on est conduit à l'un ou l'autre des résultats

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^2 = 0,$$

$$a^2(ae - 4bd + 3c^2) - 3(b^2 - ac)^2 = 0.$$

(Michael Roberts.)

732. En posant

$$H = a_1^2 - a_0a_2,$$

$$I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$

$$J = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3,$$

$$K = 4(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)(a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2)$$
$$- (a_0a_5 - 3a_1a_4 + 2a_2a_3)^2,$$

$$L = a_0^2(a_4^2 - a_3a_5) + 3a_0a_1(a_2a_5 - a_3a_4) + 4a_0a_2(a_3^2 - a_2a_4)$$
$$+ 2a_1^2(a_3^2 - a_1a_5) + 5a_1^2a_2a_4 + 3a_2^4 - 8a_1a_2^2a_3,$$

démontrer la relation suivante

$$a_0^2 L^2 = 4H[H(I^3 - 9J^2 - 2IL - HK) + a_0 J(3L - I^2)] + a_0^2 K(HI + a_0 J) + a_0^2 I(12J^2 + 2IL - I^3).$$

(MICHAEL ROBERTS.)

733. Si les six points P, Q, A, B, C, D sont sur une même conique, les points d'intersection des droites PA, QB; PB, QA; PC, QD; PD, QC sont sur une conique qui passe par les points P et Q. (CAYLEY.)

734. Trouver la condition pour qu'une asymptote d'une conique donnée par l'équation générale du second degré passe par l'origine. (SALMON.)

735. Le lieu des centres des coniques tangentes aux côtés d'un triangle, et telles, que les normales menées par les points de contact se rencontrent en un même point, est une courbe du troisième degré qui passe par les sommets du triangle, le centre de gravité, le point d'intersection des hauteurs, les centres des cercles inscrits et exinscrits, les milieux des côtés, les milieux des hauteurs (*).

(THOMSON.)

736. Soit M un point d'une courbe, et M_1 le point correspondant de sa transformée par rayon vecteur réciproque par rapport à un point O; n, n_1 les longueurs des normales à ces deux courbes comprises entre les points M et M_1, et une perpendiculaire à OM menée par le point O; enfin, ρ et ρ_1 les rayons de courbure aux points M et M_1. On aura

$$\frac{n}{\rho} + \frac{n_1}{\rho_1} = 2.$$

(NICOLAÏDÈS.)

(*) Cette question et les deux précédentes sont extraites du journal *The educational Times*, août 1864.