Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 130-135

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__130_1>

CORRESPONDANCE.

1. Nous prions les personnes qui veulent bien nous envoyer des questions pour être proposées à nos abonnés, de vérifier chaque énoncé avec le plus grand soin. Une expérience récente nous a appris qu'on pouvait perdre beaucoup de temps en cherchant à démontrer des propositions dans lesquelles un mot a été substitué à un autre par inadvertance ou dont l'énoncé pèche par l'omission de quelque condition qui en limite la généralité.

Nous recommandons à nos correspondants d'écrire lisiblement et de mettre sur des feuilles séparées les diverses questions qu'ils résolvent. Cela nous est indispensable pour le classement. Les élèves ne doivent pas oublier qu'une question n'est qu'à moitié résolue lorsqu'on n'a pas discuté les cas particuliers les plus intéressants.

2. M. Mention a démontré, en décembre 1864, que le lieu des centres des hyperboles équilatères tangentes aux côtés d'un triangle est ce qu'il appelle *cercle des hauteurs*, théorème déjà donné par lui en 1850 (voir *Nouvelles Annales*, t. IX, p. 7). M. Mathieu nous écrit à cette occasion : « Faute d'avoir examiné d'une manière suffisante le cercle que M. Mention nomme *cercle des hauteurs*, il m'avait échappé qu'il se confond avec le cercle conjugué *dans le*

cas du triangle obtusangle. Dans le triangle acutangle, c'est autre chose, puisque le cercle des hauteurs est réel, tandis que le cercle conjugué devient imaginaire. Le cercle conjugué est donc bien moins général que le cercle des hauteurs, et il conviendrait sans doute de se servir plutôt du terme de *cercle conjugué* que du terme de *cercle des hauteurs* pour représenter un lieu qui doit devenir imaginaire quand le triangle devient acutangle. » M. Mention adhère complétement aux vues de M. Mathieu, et sacrifie une dénomination qu'il n'avait adoptée que pour abréger, à une époque où les propriétés du cercle conjugué n'avaient pas encore été étudiées par les géomètres. Ajoutons, pour quelques-uns de nos lecteurs, qu'un cercle et un triangle sont conjugués, lorsque chaque sommet du triangle est, relativement à ce cercle, le pôle du côté opposé.

3. M. Gerhardt, élève de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard), démontre le théorème suivant : *Si par un point* O *pris dans le plan d'une conique on mène quatre droites*, OAa, OBb, OCc, ODd *coupant la conique aux points* A, a, B, b, *etc., le point de rencontre des droites* bA, Ac *et le point de rencontre des droites* aB, cD *sont en ligne droite avec le point* O.

M. Gerhardt démontre bien simplement son théorème en mettant l'équation de la conique sous la forme

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0.$$

Il en déduit diverses conséquences et un théorème corrélatif.

Le théorème de M. Gerhardt peut encore se démontrer avec une grande facilité en supposant que la conique se réduise à un cercle et que le point O passe à l'infini. Par la méthode des projections on étend ensuite le théorème aux autres sections coniques.

4. Un correspondant qui ne veut pas être nommé nous adresse quelques réflexions au sujet d'un Rapport fait par une Commission chargée d'examiner les copies couronnées au concours général en Mathématiques spéciales et en Mathématiques élémentaires depuis 1830 jusqu'à 1863.

Il résulte de ce Rapport qu'on a obtenu : 1° d'excellents résultats lorsqu'on a posé aux candidats des questions intéressantes et de nature à favoriser l'esprit d'invention ; 2° des résultats médiocres, quand on a proposé des questions du cours, ne sollicitant pas assez l'initiative des candidats ; 3° des résultats très-mauvais, quand les questions s'adressaient seulement à la mémoire des élèves, ou exigeaient des calculs très-laborieux. Pas n'était besoin, ajoute notre correspondant, de réunir des gens d'esprit, de leur faire construire des courbes et calculer des moyennes, pour arriver à de pareilles conclusions. Nous sommes parfaitement de son avis. Le simple bon sens indique combien importe le choix judicieux des questions posées dans un concours. M. Terquem n'avait pas eu besoin de statistique pour critiquer les compositions données vers 1853, et où le mérite des candidats se jugeait sur le plus ou moins d'habitude qu'ils avaient de manier les Tables de logarithmes. Les concours généraux pouvaient faire croire que l'enseignement mathématique avait beaucoup baissé en France depuis une dizaine d'années. La lecture des *Nouvelles Annales*, où tant de questions difficiles sont habilement résolues par des élèves, prouve heureusement le contraire.

5. M. Réalis, ingénieur à Turin, nous écrit :

« M. Catalan a parfaitement raison d'observer que le procédé que j'expose, page 439 du tome précédent, se trouve indiqué dans le *Manuel des candidats à l'École Polytechnique* ; et, certes, si j'avais eu cet excellent ouvrage sous les yeux lorsque je vous ai envoyé ma Note sur la décomposition des fractions rationnelles, j'aurais supprimé la première partie de cette Note.

» Mais qu'il me soit permis d'ajouter que ce n'est point *contrairement à mon opinion* que le savant professeur dit que le calcul des dérivées successives de la fraction.... est presque toujours fort compliqué. Si l'on veut bien se reporter à l'article cité, on verra que je n'y donne point le procédé en question comme constituant une méthode pratique ou nouvelle de décomposition ; je rappelle les formules de l'*Algèbre supérieure* et je dis : *Cette manière de parvenir à l'expression algébrique des numérateurs des fractions..... est, ce me semble, plus expéditive et plus simple que celle qu'on trouve exposée, etc.* Mon but n'etait donc que de simplifier la démonstration de formules connues, précieuses au point de vue théorique, mais qui, évidemment, ne se prêtent pas commodément à la décomposition effective. Or, cette simplification avait déjà été faite. »

6. *Extrait d'une lettre de M. Mannheim.* — « ... Vous pourriez appeler l'attention des élèves sur l'observation suivante :

» *On n'altère pas le résultat, de la solution d'une question, lorsqu'on fait varier les éléments qui ne sont pas intervenus dans le développement de cette solution.*

» En voici une application : Quel est le lieu des centres des coniques qui passent par quatre points fixes?

» Soient :

$$S = 0, \tag{1}$$

$$S' = 0, \tag{2}$$

les équations de deux coniques : l'équation

$$S + \lambda S' = 0 \tag{3}$$

représente, lorsqu'on donne à λ toutes les valeurs possibles, le faisceau des coniques qui passent par les points communs aux deux premières.

» Pour déterminer le lieu des centres de ces courbes, on élimine λ entre les dérivées, prises par rapport à x et à y, de l'équation (3).

» On trouve ainsi que le lieu est une courbe du second degré. Cette courbe passe par les points de rencontre des droites qui réunissent deux à deux les quatre points communs à toutes les coniques du faisceau et par les milieux de ces droites. Observons maintenant que les termes indépendants dans les équations (1) et (2) ne sont pas intervenus dans les dérivées de l'équation (3). D'après ce qui précède, notre lieu ne sera pas changé si nous modifions ces quantités indépendantes, et si nous prenons pour les équations des deux premières coniques

$$S + \mu = 0, \quad S' + \nu = 0,$$

dans lesquelles μ et ν sont deux constantes arbitraires. Interprétons géométriquement ce résultat analytique. L'équation

$$S + \mu = 0,$$

lorsqu'on fait varier μ, représente des coniques concentriques semblables à la conique dont l'équation est (1) et semblablement placées : indiquons ces courbes en disant qu'elles font partie du faisceau A.

» De même, indiquons les coniques représentées par l'équation

$$S' + \nu = 0,$$

en disant qu'elles font partie du faisceau B.

» Le résultat de notre observation peut alors s'énoncer ainsi :

» *Quelles que soient les deux courbes des faisceaux* A *et* B *prises pour fixer quatre points, les coniques passant par ces quatre points auront leurs centres sur une courbe unique du second degré* (C).

» Si les deux premières courbes des faisceaux A et B sont tangentes entre elles, leur point de contact appartiendra à (C); donc :

» *Les points où les courbes du faisceau* A *sont touchées par les courbes du faisceau* B *sont sur la conique* (C).

» De là on déduit le nombre des coniques du faisceau B qui touchent une conique fixe.

» Si les courbes du faisceau B sont des circonférences concentriques, les points où elles touchent les courbes du faisceau A ne sont autres que les pieds des normales abaissées, sur ces courbes, du centre fixe de toutes les courbes B; donc :

» *Le lieu des pieds des normales abaissées d'un point fixe sur des coniques concentriques semblables et semblablement placées est une conique.*

» On déduit de là qu'on peut mener quatre normales à une conique par un point pris dans le plan de cette courbe.

» Fixons une conique du faisceau A; *le lieu des milieux des cordes communes à cette courbe et aux courbes du faisceau* B *est la conique* (C); *cette courbe est aussi le lieu des points de rencontre de ces cordes communes.*

» Il serait bon d'engager les élèves à vous envoyer l'extension, au cas de l'espace, des considérations qui précèdent; ils trouveront ainsi très-simplement que d'un point on peut mener six normales à une surface du second degré. »