NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sur une méthode d'Abel pour déterminer la racine commune à deux équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 109-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__109_1>

SUR UNE MÉTHODE D'ABEL POUR DÉTERMINER LA RACINE COMMUNE A DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. G. D., ABONNÉ.

Abel, dans un Mémoire inséré au tome XVII des *Annales de Gergonne*, a donné une méthode pour déterminer la racine commune à deux équations. Cette méthode a été exposée complétement par M. Serret dans son *Algèbre supérieure*, 2[e] édition, p. 57. Il me semble qu'une remarque bien simple, qui ne se trouve pas dans le Mémoire d'Abel, permet d'abréger l'exposé de la méthode et d'obtenir diverses expressions de la racine commune aux deux équations. Je conserve les notations de

M. Serret. Soient

$$(1)\quad f(y) = y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{n-2} + \ldots + p_{m-2} y + p_m = 0,$$
$$(2)\quad F(y) = y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_{n-2} y + q_n = 0,$$

les deux équations qui ont une racine commune; soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$, les n racines de l'équation (2). Supposons que y_1 soit la racine commune aux deux équations. Portons ces racines dans le premier membre de l'équation (1), nous aurons les résultats

$$f(y_1),\ f(y_2), \ldots,\ f(y_n),$$

et le premier de ces résultats $f(y_1)$ sera nul. Formons les produits de tous ces résultats pris $n-1$ à $n-1$, et désignons par R_μ celui des résultats qui ne contient pas $f(y_\mu)$. R_μ sera une fonction symétrique des racines $y_1, \ldots, y_n$, excepté y_μ, c'est-à-dire des racines de l'équation

$$\frac{F(y)}{y - y_\mu} = 0.$$

On pourra donc ramener R_μ à une fonction rationnelle et entière de y_μ, fonction qu'on pourra même réduire à une fonction de degré $n-1$,

$$R_\mu = \rho_0 + \rho_1 y_\mu + \ldots + \rho_{n-2} y_\mu^{n-2} + \rho_{n-1} y_\mu^{n-1}.$$

C'est ici que nous proposons une modification à la marche adoptée par Abel. Remarquons que toutes les quantités R_μ, excepté R_1, sont nulles, parce qu'elles contiennent $f(y_1)$ en facteur. Donc, si l'on remplace y_μ par y et si l'on égale R_μ à zéro, l'équation

$$\rho_0 + \rho_1 y + \ldots + \rho_{n-2} y^{n-2} + \rho_{n-1} y^{n-1} = 0$$

aura pour racines toutes les racines de l'équation (2), excepté y_1. Dès lors, il est bien facile de trouver y_1. Par exemple, on a

$$y_2+y_3+\ldots+y_n=-\frac{\rho_{n-2}}{\rho_{n-1}},$$

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=-q_1;$$

donc

$$y_1=\frac{\rho_{n-2}}{\rho_{n-1}}-q_1:$$

c'est l'expression que donne Abel; mais on a encore

$$y_2y_3\ldots y_n=\pm\frac{\rho_0}{\rho_{n-1}},$$

$$y_1y_2\ldots y_n=\mp q_n;$$

donc

$$y_1=-\frac{q_n\rho_{n-1}}{\rho_0}.$$

De même,

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\ldots+\frac{1}{y_n}=-\frac{q_{n-1}}{q_n},$$

$$\frac{1}{y_2}+\ldots+\frac{1}{y_n}=-\frac{\rho_1}{\rho_0},$$

d'où

$$\frac{1}{y_1}=\frac{\rho_1}{\rho_0}-\frac{q_{n-1}}{q_n}.$$

On pourra donc se borner à calculer dans R_μ deux termes seulement, soit, comme le propose Abel, ρ_{n-1}, ρ_{n-2}, soit ρ_0, ρ_1 ou ρ_0, ρ_{n-1}, comme il résulte de notre remarque.