NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

# De la transformation géométrique des figures planes, et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 3 (1864), p. 97-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__97_0>

# DE LA TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE DES FIGURES PLANES,

## Et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

1. Le tome II ($2^e$ série) des *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de Bologne*, année 1863, contient un intéressant article de M. le professeur Cremona, relatif à la *transformation géométrique des figures planes*.

Je m'étais moi-même occupé de cette question il y a quelques années, dans un Mémoire sur la *génération de certaines courbes à double courbure*, adressé à l'Institut de France. Les *Comptes rendus* de l'année 1859, t. XLIX, p. 542, ont fait mention de cet envoi; l'objet du Mémoire s'y trouve succinctement indiqué dans une Note d'où j'extrais le passage suivant :

« Ce Mémoire est précédé d'une introduction où je » cherche à préciser l'état de la question : il se divise en » deux parties.

» Dans la première partie je présente, sous plusieurs » points de vue, la théorie de figures correspondantes » d'un nouveau genre tracées sur le plan, où des points » correspondent à des points et des droites à des courbes » de l'ordre $n$, douées d'un point multiple de l'ordre » $(n-1)$ qui leur est commun à toutes. Cette théorie » me paraît offrir quelque intérêt par elle-même; mais » elle en acquiert aussi par l'application que j'en fais à la » construction des courbes à double courbure. Ce sont,

» en effet, les points homologues de ces figures, désignées
» par moi sous le nom de *figures isographiques*, qui
» servent à guider les rayons vecteurs rectilignes, au
» moyen desquels s'engendre la courbe à double cour-
» bure de l'ordre $(n+2)$. Cette application fait le
» sujet de la seconde partie du Mémoire. J'explique
» comment on peut construire ainsi une courbe à double
» courbure d'un degré quelconque, et je termine en in-
» diquant le moyen d'obtenir la tangente en un point
» quelconque de la courbe. » (*Comptes rendus*, t. XLIX, p. 542.)

Les résultats auxquels j'étais parvenu dans ce Mémoire inédit concordent, à plusieurs égards, avec ceux que M. Cremona vient de publier. Cependant nos points de départ, nos conséquences et nos procédés de démonstration étant très-différents, j'ai pensé que la publication de la première partie de mon travail, bien que tardive, offrait une certaine opportunité, et ne serait pas sans intérêt pour les géomètres.

Tel est l'objet dn présent article.

2. Supposons qu'on ait, sur un plan, un réseau de courbes du degré $n$, ayant toutes en commun $2n-2$ points simples, et un autre point O, qui soit, sur chacune d'elles, multiple de l'ordre $n-1$. Ce point multiple équivaut, comme on sait, quant à la détermination de chaque courbe, à $\frac{1}{2}n(n-1)$ points simples. Donc chacune des courbes du réseau est assujettie, par équivalence, à passer par

$$\frac{1}{2}n(n-1)+2(n-1)=\frac{1}{2}n(n+3)-2$$

points donnés, c'est-à-dire par autant de points moins deux qu'il en faut pour déterminer une courbe du degré $n$. Ces $2n-1$ *points fondamentaux,* dont l'un est de l'ordre $n-1$, forment la *base* (B) du réseau.

3. Deux courbes du réseau ne se coupent qu'en un seul point autre que les points fondamentaux; car ceux-ci équivalent à $\overline{n-1}^2 + 2(n-1) = n^2 - 1$ intersections. Toutes les courbes qui passent par un même point forment un faisceau.

Une droite quelconque, menée par le point fondamental multiple O, ne coupe l'une quelconque des courbes $C^n$ qu'en un seul point. Réciproquement, un point $i$ de cette courbe ne donne lieu qu'à un seul rayon $Oi$. D'après cela, on peut appeler *rapport anharmonique* de quatre points pris sur une courbe $C^n$ à point multiple de l'ordre $n-1$, le rapport anharmonique des quatre droites qui les joignent au point multiple. On saura donc ce qu'il faut entendre par cette expression, dont M. Chasles fait usage depuis longtemps dans la théorie des coniques, savoir : *divisions homographiques correspondantes sur une droite et sur une courbe,* ou *sur deux courbes.*

Pour abréger le discours, j'appellerai *courbes fondamentales* les courbes du réseau déterminé par les conditions ci-dessus.

4. J'appelle *figures isographiques planes de l'ordre $n$ deux figures telles, qu'à une droite quelconque de la première* (F) *il correspond, dans la seconde* (F'), *une courbe de l'ordre $n$, douée d'un point multiple de l'ordre $n-1$ en un point fixe* O', *et passant par $2n-2$ autres points fixes* (*).

(*) Ces conditions sont les seules qu'on puisse poser *à priori;* il en résulte, comme on va le voir, cette conséquence nécessaire que, réciproquement, à une droite quelconque de la figure (F') il correspond, dans la figure (F), une courbe douee d'un point fixe de l'ordre $n-1$, et passant

De telles figures peuvent exister. Car soient

$$L = o, \quad L' = o, \quad L'' = o,$$

les équations de trois droites données de la figure (F). Toute droite de cette figure pourra être représentée par une équation de la forme

$$L + \lambda L' + \mu L'' = o,$$

$\lambda$ et $\mu$ étant deux indéterminées. Soient aussi

$$C = o, \quad C' = o, \quad C'' = o,$$

les équations de trois courbes de l'ordre $n$, assujetties aux conditions précitées dans la seconde figure (F′). Toute autre courbe, satisfaisant aux mêmes conditions, aura une équation de la forme

$$C + \lambda' C' + \mu' C'' = o,$$

$\lambda'$ et $\mu'$ étant deux nouvelles indéterminées.

Or, si l'on suppose $\lambda' = a\lambda$, $\mu' = b\mu$, $a$ et $b$ étant deux constantes, ce qui change l'équation précédente en celle-ci :

$$C + a\lambda C' + b\mu C'' = o,$$

il est clair qu'à une droite de la première figure il correspondra, dans la seconde, une courbe unique et déterminée, puisque les valeurs de $\lambda$ et de $\mu$ seront déterminées par la droite, et réciproquement. On en conclut aussi que, *à un point, considéré dans la figure* (F) *comme étant l'intersection de deux droites, il ne correspondra, dans la figure* (F′), *qu'un seul point, variable avec le premier, et résultant de l'intersection des deux*

---

par $2n - 2$ autres points fixes. Mais cette réciproque n'est pas évidente, et il est indispensable de la démontrer. C'est ce que je ferai ci-après (nos 7, 8 et 9).

*courbes fondamentales correspondantes à ces droites* (n° 3).

5. Cette analyse prouve immédiatement que, pour déterminer deux figures isographiques planes d'un ordre quelconque, on peut prendre arbitrairement quatre droites de la première figure, et les quatre courbes correspondantes de la seconde. Car, à l'aide de l'équation de la quatrième courbe, on déterminera les valeurs des constantes $a$ et $b$ de l'équation précédente, savoir :

$$a = \frac{\lambda}{\lambda'}, \quad b = \frac{\mu}{\mu'},$$

$\lambda$ et $\mu$, $\lambda'$ et $\mu'$ étant les valeurs numériques des coefficients de $L'$, $L''$ et $C'$, $C''$, respectivement, qui conviennent particulièrement à la quatrième droite et à la quatrième courbe correspondante.

6. Le caractère distinctif des figures isographiques consiste donc d'abord en ce que, à une droite L de la figure (F), il correspond, dans la figure (F′), une courbe $C^n$, qui passe par $2n - 1$ points fixes, dont l'un est multiple de l'ordre $n - 1$; que, à un point variable $a$ de la figure (F), il correspond, dans la figure (F′), un seul point $a'$ variable avec $a$, et enfin qu'à un point $a'$, considéré dans (F′) comme étant le point d'intersection de deux courbes fondamentales, il correspond, dans la figure (F), un seul point variable $a$, situé à l'intersection des deux droites correspondantes à ces courbes.

7. Il résulte de là, ainsi qu'on va le démontrer, que, *réciproquement, à une droite quelconque* L′ *de la figure* (F′), *il correspond, dans la figure* (F), *une courbe* $C^n$ *de l'ordre* $n$, *qui passe par* $2n - 1$ *points fixes, dont l'un est de l'ordre* $n - 1$; *et qu'à un point*

*variable* a′ *de la figure* (F′), *il ne correspond qu'un seul point variable a dans la première.*

En effet, la droite L′ rencontre l'une quelconque $C'^n$ des courbes fondamentales de la figure (F′) en $n$ points $a'$, $b'$, $c'$,..., variables avec cette courbe. Donc (n° 6) il correspond à ces points, dans la figure (F), $n$ points $a$, $b$, $c$,..., situés sur la droite M, qui, dans cette figure, correspond à $C'^n$. Par conséquent, la ligne inconnue, qui correspond à la droite L′, est une courbe $C^n$ du degré $n$, puisque cette ligne possède $n$ points sur une droite quelconque M.

8. Je dis, en outre, que cette courbe $C^n$ passe par $2n-1$ points fixes, dont un est multiple de l'ordre $n-1$.

Pour le démontrer, commençons par remarquer que les $2n-1$ points fondamentaux de la figure (F′) déterminent complétement une certaine courbe fixe $\sum'_{n-1}$, de l'ordre $n-1$, douée au point fondamental O′ d'un point multiple de l'ordre $n-2$; car cette courbe se trouve ainsi, par équivalence, assujettie à passer par $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ points, c'est-à-dire par autant de points qu'il en faut pour déterminer une courbe du degré $n-1$.

Cela posé, considérons le système composé de la courbe $\sum'_{n-1}$ et d'une droite de direction quelconque O′L′, issue du point multiple fondamental O′. Ce système est l'une des courbes fondamentales de la figure (F′), et il en existe une infinité de semblables, déterminées par les différentes droites qu'on peut mener du point O′, en les associant à la courbe fixe $\sum'_{n-1}$. En effet, chacun de ces systèmes représente une courbe du degré $n$, qui a un point multiple de l'ordre $n-1$ en $O'$, et qui passe par tous les autres points fondamentaux de la figure $(F')$. A chacune de ces courbes particulières, que j'appellerai *courbes fondamentales brisées*, il correspond, dans $(F)$, une certaine droite $L$; et comme ces courbes forment un faisceau, les droites correspondantes en forment un aussi, c'est-à-dire qu'elles passent toutes par un seul et même point $O$.

Soit actuellement $M'$ une droite quelconque de la figure $(F')$. Chacune des courbes fondamentales brisées ne coupe $M'$ qu'en un seul point qui varie avec cette courbe; car les $n-1$ autres points d'intersection sont ceux où $M'$ coupe la courbe fixe et invariable $\sum'_{n-1}$, et par conséquent sont invariables, quelle que soit la courbe sécante. Donc chacune des droites, telles que $L$, qui, dans la figure $(F)$, correspondent à ces courbes brisées, doit être telle, qu'elle ne coupe la courbe $S^n$, correspondante à la droite $M'$, qu'en un seul point susceptible de varier avec cette droite, ce qui ne peut évidemment avoir lieu que si la courbe $S^n$ est douée d'un point de l'ordre $n-1$ situé sur cette droite. Or toutes ces droites $L$ passent par un même point $O$; donc c'est ce point $O$ lui-même qui est le point de l'ordre $n-1$ sur la courbe $S^n$. On en conclut, puisque $S^n$ est une courbe fondamentale *quelconque* de la figure $(F)$, que toutes ces courbes sont douées d'un point de l'ordre $n-1$ en un même point fixe $O$.

9. En second lieu, considérons le système composé d'une droite $O'a'$ joignant le point $O'$ à l'un $a'$ des points simples fondamentaux $(B')$ de la seconde figure, et d'une courbe $S'_{n-1}$, douée en $O'$ d'un point de l'ordre $n-2$, et passant par tous les points fondamentaux $(B')$ à l'exclusion

du point $a'$; courbes dont il existe une infinité, puisque chacune d'elles, pour être déterminée, a besoin d'une condition de plus que celles qui viennent d'être indiquées; ce système forme une autre espèce de *courbe fondamentale brisée* de la figure (F'). Donc il lui correspond, dans la figure (F), une certaine droite L; et toutes les droites L, correspondantes à ces courbes brisées qui forment un faisceau, forment elles-mêmes un faisceau, c'est-à-dire passent par un même point $a$.

Soit maintenant une droite quelconque M' de la figure (F'). Chacune des courbes brisées, dont il vient d'être question, coupe M' en un point fixe (M', O'$a'$), et en $n - 1$ autres points, seuls susceptibles de varier en même temps que cette courbe. Donc la courbe $S^n$, correspondante à M', doit être telle, qu'elle ne coupe chaque droite L, correspondante à une courbe brisée, qu'en $n - 1$ points susceptibles de varier avec cette droite, et que le $n^{ième}$ point d'intersection soit fixe; ce qui exige que la courbe passe par un point fixe situé sur cette droite. Or toutes les droites L passent, comme on vient de le dire, par un même point $a$. Donc la courbe $S^n$ passe aussi par ce point, et par conséquent il en est de même de toutes les autres courbes fondamentales de (F), puisque $S^n$ est l'une *quelconque* de ces courbes.

En considérant successivement les autres points fondamentaux $b'$, $c'$, $d'$,..., de la figure (F'), on prouverait pareillement que chaque courbe $S^n$ passe par autant de points fixes $b$, $c$, $d$,..., dans la figure (F). Donc enfin

*Il existe une réciprocité parfaite entre les deux figures,* et l'on peut compléter la définition des figures isographiques donnée plus haut (n° 4), en disant que *réciproquement, à une droite quelconque de la seconde figure, il correspond, dans la première, une courbe du* *degré $n$ assujettie à passer par $2n-1$ points fixes, dont l'un O est multiple de l'ordre $n-1$.*

10. Cherchons maintenant, afin de bien approfondir les relations existantes entre les deux figures, quels sont les points d'une figure qui correspondent aux points fondamentaux (simples ou multiple) de l'autre.

Soient deux droites OL, OM de la figure (F). Les courbes correspondantes dans (F′) sont des courbes brisées, composées de la courbe fixe $\sum'_{n-1}$ et de deux droites O′L′, O′M′. Ainsi le point multiple O a pour homologues, dans la figure (F′), tous les points de la courbe $\sum'_{n-1}$ indistinctement. Et, réciproquement, le point multiple O′ a pour homologues tous les points de la courbe $\sum_{n-1}$, qui est déterminée, dans la figure (F), par les $2n-2$ points fondamentaux $a, b, c,\ldots$, et par le point O, considéré comme étant multiple de l'ordre $n-2$.

Soient OL et LM deux droites de la figure (F), qui se coupent au point L. Les courbes correspondantes de la figure (F′) sont, respectivement, une droite O′L′ combinée avec la courbe fixe $\sum'_{n-1}$, et une autre courbe fondamentale $C'_n$. Or cette $C'_n$ ne coupe $\sum'_{n-1}$ en aucun point variable, puisqu'elle a, en commun avec elle, les $2n-1$ points fondamentaux, dont l'un est de l'ordre $n-1$ sur l'une et de l'ordre $n-2$ sur l'autre, ce qui donne, par équivalence, $n(n-1)$ points d'intersection. Donc le point d'intersection de OL et de LM a nécessairement pour homologue le point de rencontre de O′L′ avec la courbe $S'_n$. Ainsi les points de OL ont leurs homologues sur $O'L'$ et non sur la courbe fixe $\sum'_{n-1}$ ; ce qui s'accorde avec ce qu'on vient de démontrer, savoir, que cette courbe fixe correspond tout entière au seul point O.

**11.** Supposons encore que les droites $aL$, $aM$, $aN$,..., se coupent au point fondamental simple $a$. Les courbes correspondantes dans la figure $(F')$ se décomposeront, comme on vient de le voir, en une seule et même droite $O'a'$, et en diverses courbes $S'_{n-1}$, $T'_{n-1}$, $R'_{n-1}$,..., correspondantes, une à une, aux droites $aL$, $aM$, $aN$,..., respectivement. Ces courbes ayant en commun le point $O'$, qui est de l'ordre $n-2$ sur chacune d'elles, et $2n-3$ autres points, ne se coupent plus. Donc on peut dire qu'au point fondamental $a$ correspondent, dans l'autre figure, tous les points de la droite fixe $O'a'$.

Enfin on démontrerait, par des considérations analogues, que toute droite, telle que $ab$, qui passe par deux points fondamentaux $a$, $b$ de la figure $(F)$, a pour correspondante une courbe qui se décompose en trois branches distinctes, savoir, deux droites $O'a'$, $O'b'$, joignant le point $O'$ aux points fondamentaux $a'$, $b'$, et une courbe fixe $\sum'_{n-2}$, de l'ordre $n-2$, qui est déterminée par le point $O'$, considéré comme étant un point multiple de l'ordre $n-3$, et par les $2n-4$ autres points fondamentaux simples de $(F')$.

**12.** Par exemple, si $n=2$, ce qui est le cas de la transformation conique, toute droite d'une figure, qui passe par l'un des points fondamentaux, a pour homologue, dans l'autre figure, le système de deux droites passant par les trois points fondamentaux de celle-ci ; résultat déjà signalé par MM. Steiner et Magnus, dans le cas particulier dont il s'agit ici.

13. Afin d'abréger, je me bornerai, en général, dans ce qui va suivre, à donner les énoncés des propositions. Mais, après les explications précédentes, le lecteur en trouvera sans peine les démonstrations.

*A une courbe quelconque de l'ordre m, tracée dans le plan de l'une des deux figures, il correspond, dans l'autre, une courbe de l'ordre mn, douée en* O (ou en O′) *d'un point multiple de l'ordre* $m(n-1)$, *et de* $(2n-1)$ *points de l'ordre m aux points fondamentaux de cette figure.*

14. *Dans deux figures isographiques planes, quatre points de l'une, situés en ligne droite, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points homologues situés sur la courbe correspondante de l'autre figure.*

C'est une généralisation du théorème analogue dans les figures homographiques, qui ne sont au reste qu'un cas particulier des figures isographiques; celui où l'on a $n=1$.

Pareillement, *quatre droites de la première figure, issues d'un même point, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre courbes correspondantes dans la seconde.*

15. *Deux figures isographiques sont déterminées, quand on donne quatre droites de la première figure et les quatre courbes correspondantes de la seconde.*

*Elles sont également déterminées, si l'on connaît quatre couples de points homologues, et, en outre, la base* (B′) *du réseau des courbes de l'une des deux figures.*

16. Dans ces deux cas, il reste à déterminer les points fondamentaux (B) de l'autre figure. Pour cela, on mènera par le point O′ deux droites quelconques O′L′, O′M′,

et, sur chacune d'elles, on prendra deux points $l'$, $L'$, $m'$, $M'$. On cherchera leurs homologues $l$, $L$, $m$, $M$ dans l'autre figure. Le point de concours O des deux droites $Ll$, $Mm$ est le point fondamental multiple de cette figure.

Pour trouver les points fondamentaux simples, on tracera une droite quelconque de la seconde figure, et on déterminera la courbe $C^n$ correspondante dans la première. Ensuite, si l'on mène des droites par les points fondamentaux $(B')$, on connaîtra immédiatement les droites $Oa$, $Ob$, $Oc$,..., qui, dans la figure (F), font partie intégrante, respectivement, des courbes fondamentales brisées correspondantes à ces droites (n° 11), et qui passent par les points fondamentaux cherchés de la figure (F). Les points d'intersection de ces droites avec la courbe $C^n$ sont les points (B).

17. Dans tout ce qui précède, les figures isographiques étaient tracées indistinctement sur deux plans différents ou sur un seul. Les théorèmes suivants, au contraire, supposent essentiellement qu'elles sont situées sur un seul et même plan. Cette hypothèse donne lieu à des conséquences intéressantes.

18. *La courbe, lieu d'intersection des droites d'une figure, formant un faisceau, avec les courbes du faisceau correspondant de l'autre figure, est une courbe du degré $n+1$, qui a un point de l'ordre $n-1$ au point multiple fondamental de celle-ci.*

C'est une conséquence du n° 14.

19. *La courbe enveloppe des droites qui joignent les points d'une droite* L *aux points homologues de la courbe correspondante dans l'autre figure, est une courbe de la classe $n+1$, qui a la droite* L *pour tangente multiple de l'ordre $n$.*

20. *Dans deux figures isographiques, placées d'une manière quelconque, les points de la figure* (F′), *qui satisfont à la condition que les droites qui les joignent à leurs homologues respectifs dans la figure* (F) *passent toutes par un même point donné* P, *sont situés sur une courbe* U′ *de l'ordre* $n+1$, *qui passe par le point* P *et par les points* (B′), *et qui a en* O′ *un point de l'ordre* $n-1$.

*Les points correspondants de la figure* (F) *sont également situés sur une courbe* U, *de l'ordre* $n+1$, *qui passe par le point* P, *par les points* (B), *et qui a un point de l'ordre* $n-1$ *en* O.

Ces deux courbes U, U′, dont les points se correspondent un à un et sont situés sur des droites concourantes en un même point, ont, avec les courbes homologiques ordinaires, certaines analogies qui n'échapperont pas à l'attention du lecteur; je les appellerai *courbes isologiques*, relatives au point P.

Une droite PL, issue du point P, coupe généralement la courbe U en $n$ points, et elle coupe la courbe U′ en $n$ autres points, qui sont les homologues des premiers, respectivement. Comme cas particuliers, la droite PL peut passer par le point O, ou par l'un des points simples fondamentaux $a$, $b$, ...; elle peut aussi se confondre avec la ligne OO′, si le point P est pris sur cette ligne. Je n'entrerai pas dans ces détails, qui ne présentent aucune difficulté, après ce qui a été expliqué ci-dessus (n^os 10, 11 et 12).

21. *Deux figures isographiques étant placées d'une manière quelconque dans un même plan, il existe, en général, dans ce plan* $n+2$ *points doubles, c'est-à-dire qui, étant considérés comme appartenant à l'une des deux figures, sont eux-mêmes leurs homologues dans l'autre.*

En effet, soient U et V les deux courbes isologiques de la figure (F), relatives à deux points quelconques P, Q de cette figure. Chacun des points d'intersection de ces deux courbes, étant considéré comme appartenant à la figure (F), est tel, que si on le joint à son homologue dans la figure (F′), on obtient une droite qui passe tout à la fois par le point P et par le point Q. Donc, à l'exception des $n$ points que les deux courbes U, V ont en commun sur la droite PQ, tous ces points d'intersection sont des *points doubles*, c'est-à-dire des points qui coïncident avec leurs homologues. Or ces deux courbes ont $\overline{n-1}^2$ points communs confondus en un seul au point multiple O, et $2(n-1)$ autres points communs, savoir, les points (B). Donc le nombre des points doubles cherchés est

$$\overline{n+1}^2 - \overline{n-1}^2 - 2(n-1) - n = n+2.$$

Ainsi, dans le cas des figures homographiques où $n = 1$, le nombre des points doubles est 3, comme on le sait.

22. Il résulte du théorème précédent que, si l'on prend deux points quelconques S, S′ dans l'espace, et qu'on les joigne respectivement aux points homologues de deux figures isographiques tracées sur un plan (ou sur deux plans différents), *les arêtes homologues de ces deux faisceaux isographiques se coupent sur une courbe à double courbure du degré $n+2$*, puisqu'il existe, sur un plan quelconque, $n+2$ points doubles, c'est-à-dire $n+2$ points de rencontre de ces arêtes homologues. Ce théorème se conclut aussi du n° 20, et ce second mode de démonstration fait mieux connaître les particularités de la courbe gauche engendrée. On voit ainsi que cette courbe passe par les points S, S′, O, O′, et n'y a pas de point double; elle est donc, à ce point de vue, générale dans

son degré. Mais, ainsi que le lecteur le reconnaîtra avec un peu d'attention, elle offre cette singularité qu'elle s'appuie $n$ fois sur chacune des droites SO, S'O'.

23. Dans le cas de $n = 1$, les deux faisceaux de droites sont homographiques, et la courbe à double courbure est du troisième ordre, comme on le savait (*). La théorie des figures isographiques conduit donc directement à une généralisation de ce mode particulier de génération, et le rend applicable à des courbes gauches de tous les ordres, lesquelles n'offrent aucune autre singularité que celle dont je viens de parler. Cette théorie d'ailleurs ne fait guère usage que de courbes douées d'un point multiple de l'ordre le plus élevé que leur degré comporte, et l'on sait que ces courbes sont précisément celles que la géométrie pure donne les moyens de construire directement dans tous les cas.