Questions d'examen (1863)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 81-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__81_1>

QUESTIONS D'EXAMEN (1863) (*).

Géométrie élémentaire.

1. Lieu des points d'une sphère d'où l'on voit, sous un angle droit, une droite déterminée de longueur.

(*) On se ferait une idée peu exacte des examens et de la manière dont

2. Des sommets d'un quadrilatère sphérique comme pôles, on décrit des arcs de grand cercle terminés aux côtés du quadrilatère prolongés dans le même sens. On demande l'aire totale de la figure ainsi obtenue.

3. Faire dans le tronc de pyramide une section qui soit moyenne proportionnelle entre les deux bases.

4. Les plans bissecteurs des dièdres d'un tétraèdre se coupent en un même point.

5. Les plans perpendiculaires aux arêtes d'un tétraèdre, menés par les milieux de ces arêtes, se coupent en un même point.

6. Les droites qui vont de chaque sommet d'un tétraèdre au centre de gravité de la face opposée se rencontrent en un même point.

7. Étant donnés trois points dans un plan et trois points dans un autre plan, quelle est la condition nécessaire pour que les droites qui les joignent se rencontrent en un même point?

8. Volume engendré par un triangle isocèle tournant autour d'un axe extérieur passant par son sommet.

Géométrie descriptive.

9. Une droite, assujettie à rencontrer quatre droites dans l'espace, est déterminée.

10. Projection de la bissectrice de l'angle de deux droites dont l'une est perpendiculaire au plan horizontal.

---

ils sont conduits, si l'on en jugeait par l'échantillon que nous donnons ici. D'abord nous avons laissé de côté les questions, et ce sont les plus nombreuses, qui ne font que reproduire un article du programme officiel; nous avons ensuite abrégé les énoncés, ce qui peut leur avoir fait perdre sous le rapport de la clarté. Pour bien juger d'une question d'examen, il ne faut pas la considérer isolément, mais la comparer à celles qui l'ont précédée et amenée. C'est ainsi que la question 39, très-difficile en elle-même, n'est qu'un corollaire très-simple de la question 30. P.

11. Mener par une droite donnée un plan qui coupe une sphère donnée suivant un cercle de rayon donné.

12. On donne un ellipsoïde de révolution dont l'axe est vertical. Trouver les traces du plan conjugué à une droite donnée.

13. Trouver l'intersection d'un cylindre dont l'axe est dans le plan horizontal, par un plan que déterminent sa trace horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal.

14. Représenter une sphère qui a pour diamètre une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre et dont on donne les traces.

15. Intersection de deux cylindres de révolution tangents au plan horizontal.

16. Intersection de deux cônes de révolution dont l'un a son axe perpendiculaire au plan horizontal et l'autre son axe perpendiculaire au plan vertical.

17. On circonscrit à une sphère un cylindre dont les génératrices sont également inclinées sur les deux plans de projection. Trouver les projections de la courbe de contact.

18. Une circonférence est donnée dans le plan bissecteur de l'angle formé par les deux plans de projection. Construire un cône qui ait pour base cette circonférence et pour sommet un point pris dans le plan vertical. Plans tangents perpendiculaires au plan horizontal.

19. On donne un ellipsoïde dont deux plans principaux sont parallèles aux plans de projection. Trouver les traces d'un plan qui coupe l'ellipsoïde suivant un cercle.

20. Mener une droite qui rencontre deux autres droites et fasse avec ces dernières des angles égaux.

21. Intersection d'un cône et d'une sphère.

22. On coupe un cylindre vertical par un plan perpendiculaire au plan vertical. Trouver les points de la section où le plan est normal au cylindre.

Algèbre.

23. Division d'un polynôme entier par x^2+px+q. Forme du reste.

24. Trouver la somme de la suite

$$q+2q^2+3q^3+4q^4+\ldots+nq^n.$$

25. Extraire la racine carrée d'une expression imaginaire.

26. Limite de $(\sqrt[m]{a}-1)^m$ pour $m=\infty$.

27. Limite de $\frac{a^x-1}{x}$ pour $x=0$.

28. Maximum et minimum de la fraction

$$\frac{7x^2+8x+1}{5x^2+7x+2}.$$

29. Trouver le plus grand coefficient du développement de $(x+a)^m$.

30. Trouver l'expression de

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\ldots+\frac{1}{x-l}$$

et de

$$\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{1}{(x-l)^2},$$

$a, b, c, \ldots, l$ étant les racines de l'équation $f(x)=0$.

31. Dérivée de y par rapport à x, ces deux variables étant liées par l'équation

$$x^2+y^2=a^2e^{\text{arc tang}\frac{y}{x}}.$$

32. Démontrer que si u_n est le terme général d'une série,

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{pour } n = \infty.$$

33. Trouver deux nombres, connaissant leur somme et la somme de leurs cubes.

34. Dérivée de x^x.

35. Nombre des racines réelles de l'équation $a^x = \mathrm{L}x$.

36. Si le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f'(x)$ est du $p^{ième}$ degré, l'équation $f(x) = 0$ aura $m - p$ racines distinctes.

37. Condition pour qu'une équation du quatrième degré ait une racine triple.

38. Équation qui a pour racines les sommes des racines d'une équation du troisième degré, prises deux à deux.

39. Si l'équation $f(x) = 0$ n'a que des racines réelles et inégales, l'équation $f'(x)^2 - f(x)f''(x)$ n'a que des racines imaginaires.

40. Décomposer $(x^2 + px + q)^2 + 1$ en facteurs réels du second degré.

41. Résoudre l'équation

$$2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m} = 0$$

et montrer qu'elle a deux racines réelles.

42. Calculer $x^m + \frac{1}{x^m}$ en fonction de $x + \frac{1}{x}$ en posant $x + \frac{1}{x} = 2\cos\varphi$. Expliquer pourquoi la formule à laquelle on parvient convient à tous les cas.

43. Variations de la fonction $\frac{a^2}{x}$. Combien l'équation $\frac{a^2}{x} = b$ a-t-elle de racines?

Trigonométrie.

44. Signification géométrique de la formule

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{1}{2} C.$$

45. Rayon du cercle inscrit en fonction de celui du cercle circonscrit et du périmètre du triangle.

46. La différence des logarithmes des tangentes va-t-elle en augmentant ou en diminuant quand l'arc augmente?

47. Surface d'un quadrilatère inscriptible, connaissant les quatre côtés.

48. Calculer $\sin \frac{1}{2} a$ et $\cos \frac{1}{2} a$ en fonction de $\operatorname{tang} a$.

49. Résoudre un triangle, connaissant les angles et le rayon du cercle inscrit. Calculer en fonction des données la surface du triangle et le rayon du cercle circonscrit.

50. Des relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

déduire

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

51. Construire un triangle, connaissant un angle, la distance du pied de la hauteur correspondant à cet angle au milieu de la base, et enfin l'angle que font entre elles la hauteur et la médiane.

(*La suite prochainement.*)