NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE P.

Solutions géométriques de questions traitées analytiquement dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 541-544

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__541_1>

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DE QUESTIONS TRAITÉES ANALYTIQUEMENT DANS LES NOUVELLES ANNALES;

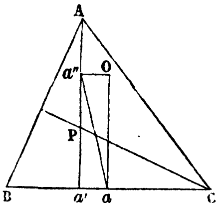
PAR M. A. DE P.,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle dit des neuf points de ce triangle.

Toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de concours des trois hauteurs.

Remarque préliminaire. — Dans tout triangle, les milieux des trois côtés, les pieds des trois hauteurs, les milieux des droites qui joignent le point de concours des trois hauteurs aux sommets sont sur une même circonférence de cercle. De plus, si, ABC étant le triangle, a' le pied de la hauteur abaissée de A sur BC, a le milieu de BC et a'' le milieu de AP, P étant le point de concours

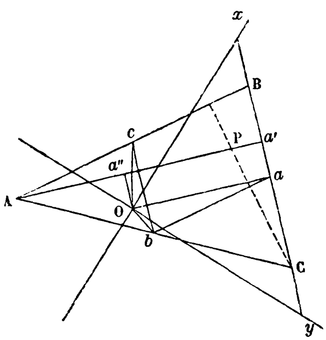
Fig 1.



des hauteurs, on prend un point O sur le cercle des neuf points, l'angle $a''Oa$ est droit, car aa'' est un diamètre, l'angle $a''a'a$ étant droit.

Soient A, B, C trois points d'une hyperbole équilatère dont Ox et Oy sont les asymptotes; soit a le milieu de BC, c le milieu de AB. L'angle cOa est égal à l'angle ABC. En effet, d'après une propriété connue de l'hyper-

Fig. 2.



bole équilatère, l'angle que l'asymptote Ox fait avec AB est égal à l'angle que la même asymptote fait avec Oc, diamètre conjugué de AB. De même, l'angle que Ox fait avec BC est égal à l'angle aOx. L'angle en B étant égal à la somme de ces deux angles, l'angle ABC est par suite égal à cOa : théorème que l'on peut énoncer ainsi :

L'angle que font entre elles deux directions est égal à l'angle que font entre eux les diamètres conjugués de ces directions.

Joignons c et b ainsi que b et a : l'angle $cba = B$. Donc les quatre points a, O, b, c sont sur une même circonférence de cercle qui est précisément le cercle des neuf points du triangle ABC.

Soit P le point de concours des hauteurs : la droite AP est perpendiculaire sur BC, le diamètre conjugué de AP est donc perpendiculaire sur Oa. Soit a'' le milieu de AP. D'après ce que nous avons vu, l'angle $a''Oa$ est droit ; donc a'' est un point du diamètre conjugué de AP ; donc P appartient à l'hyperbole, puisque A est située sur cette courbe.

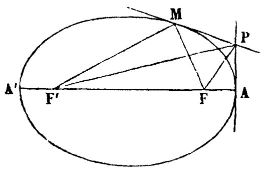
Réciproquement, si une hyperbole, passant par les trois sommets d'un triangle, passe par le point de concours des hauteurs, cette hyperbole est équilatère. En effet, prenons un cinquième point sur l'hyperbole proposée différant des quatre premiers. Par les trois points, sommets du triangle, et ce dernier point, on peut toujours faire passer une hyperbole équilatère qui passe aussi par le point de concours des hauteurs ; donc les deux coniques ont cinq points communs, elles se confondent ; la première est donc équilatère.

ÉNONCÉ. — *Les bissectrices des angles que les rayons vecteurs d'un point quelconque de l'ellipse font avec le grand axe se coupent sur la tangente à l'un des sommets situés sur le grand axe.*

Le point de rencontre est sur la tangente à l'ellipse au point considéré.

Démonstration. — Soient F et F' les deux foyers, A et A' les deux sommets situés sur le grand axe, M et M' un point situé sur l'ellipse. Menons la tangente en M. Soit P son point de rencontre avec la tangente en A. Joignons

Fig. 3.



FM, FP, F'M, F'P et FF'A : la droite F'P est bissectrice de l'angle MF'A, car on sait que l'angle sous lequel une corde est vue d'un foyer a pour bissectrice la droite qui va du foyer au pôle de la corde. De même, la droite FP est bissectrice de l'angle A'FM.

Les théorèmes se trouvent donc démontrés. La même démonstration s'applique à l'hyperbole et toutes les conséquences s'en déduisent très-simplement (*).