Nouvelles annales de mathématiques

A. Picart

# Note sur les surfaces du second degré et solution de la question 700

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 3 (1864), p. 532-535

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__532_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

# NOTE SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ ET SOLUTION DE LA QUESTION 700;

PAR M. A. PICART,
Professeur au lycée Charlemagne.

La proposition énoncée sous le n° 700 dans la livraison de mars, savoir :

*La surface, lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes appartenant à un système homofocal, coupe les ellipsoïdes orthogonalement* (STREBOR), est une conséquence immédiate de quelques propriétés bien connues des surfaces du second degré.

1° *Le rayon de courbure d'une section normale en un point d'une surface du second degré* (à centre) *est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente, divisé par la distance du centre au plan tangent en ce point* : $r = \frac{D^2}{P}$.

En effet, soit $ds$ le rayon vecteur de l'indicatrice qui correspond à la section normale menée par un point M, et $k$ la distance du plan de l'indicatrice au plan tangent en ce point; le rayon de courbure $r$ de la section est égal à $\frac{ds^2}{2k}$. Désignons par E le demi-diamètre qui aboutit au point M, par $h$ la portion de ce diamètre comprise entre M et le plan de l'indicatrice, et par $\theta$ l'angle qu'il forme avec la normale en M; on a, d'une part,

$$k = h \cos\theta,$$

d'autre part,

$$\frac{2h}{E} = \frac{ds^2}{D^2}.$$

Portant ces valeurs de $k$ et $ds^2$ dans l'expression de $r$, on obtient

$$r = \frac{D^2}{E\cos\theta}$$

ou

$$(1) \qquad r = \frac{D^2}{P}.$$

Corollaire. — *Le long d'une section circulaire, le rayon de courbure de la section normale est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent.*

On peut remarquer encore, en passant, une conséquence importante de la formule (1), savoir :

*Les sections circulaires en chaque point sont également inclinées sur les lignes de courbure qui passent par ce point;* puisque les rayons de courbure des sections normales, dirigées suivant les deux sections circulaires, sont égaux, en vertu de la formule (1).

2° *La distance, en un point, d'une surface du second degré à la surface homofocale infiniment voisine, est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent en ce point.*

Désignons, suivant l'usage, par $\rho^2$, $\rho^2 - b^2$, $\rho^2 - c^2$, les carrés des demi-axes de la surface; par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que forme avec les axes la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en un point de cette surface. On a

$$P^2 = \rho^2\cos^2\alpha + (\rho^2 - b^2)\cos^2\beta + (\rho^2 - c^2)\cos^2\gamma$$

ou

$$P^2 = \rho^2 - b^2\cos^2\beta - c^2\cos^2\gamma.$$

Si l'on passe à la surface homofocale infiniment voisine, en laissant constants $\beta$, $\gamma$, la variation de P sera la distance $dn$ cherchée. On a donc

$$dn = \frac{\rho\, d\rho}{P} \tag{2}$$

3° *Le long d'une section circulaire, le cosinus de l'angle $\theta$, que forme la normale en un point avec le rayon du cercle qui aboutit à ce point, est égal au quotient du rayon de ce cercle par le rayon de courbure de la section normale correspondante :* $\cos\theta = \frac{R}{r}$. (Théorème de Meusnier.)

Cela posé, revenons à la question qui fait l'objet de cette Note.

Que l'on mène les normales à la surface le long des sections circulaires diamétrales, et qu'on les prolonge extérieurement jusqu'à la surface homofocale infiniment voisine, les extrémités de ces normales sont à une distance du centre égale à

$$R + \frac{\rho\, d\rho}{P} \cdot \cos\theta$$

ou

$$R + \frac{\rho\, d\rho}{P} \cdot \frac{R}{r}$$

ou

$$R + \frac{\rho\, d\rho}{P} \cdot \frac{RP}{R^2}$$

ou enfin

$$R + \frac{\rho\, d\rho}{R} \quad (*).$$

Cette distance est constante ; tous ces points sont donc sur une sphère concentrique à la surface, et, par suite, ils appartiennent aux sections circulaires diamétrales de la surface homofocale infiniment voisine.

---

(*) Ce que nous appelons R ici est le demi-axe moyen de la surface.

Cette conclusion renferme la proposition énoncée.

*Note.* — MM. Courtin et Godart, Angiboust, élèves de Sainte-Barbe, Lacauchie, élève du lycée de Strasbourg, et de Marsilly, nous ont adressé des vérifications analytiques du théorème de M. Strebor.