PROUHET

Remarques sur l'abaissement et la transformation des équations

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 508-511
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__508_0>

REMARQUES SUR L'ABAISSEMENT ET LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS

(voir p. 19).

13. M. Faure a énoncé le *porisme* suivant (*voir* t. XVI, p. 59, question 362) :

L'équation générale du cinquième degré

$$(1) \qquad ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0$$

peut toujours se résoudre algébriquement lorsqu'on a entre les coefficients les relations

$$(2) \qquad \frac{d^2 - ce}{b^2 - ac} = \frac{e^2 - df}{c^2 - bd} = \frac{de - cf}{bc - ad}.$$

Cette question, posée en 1857, n'a pas encore été résolue. Ce qui la rend particulièrement difficile, c'est l'ignorance de la forme sous laquelle doivent se présenter les racines. Si cette forme était connue, elle devrait renfermer trois indéterminées en fonction desquelles on pourrait exprimer les rapports des coefficients à l'un d'entre eux : on aurait cinq équations qui par l'élimination des trois indéterminées fourniraient les relations indiquées dans l'énoncé. La démonstration se réduirait donc à une vérification.

La plus simple équation du cinquième degré résoluble par radicaux est l'équation binôme

$$x^5 + \lambda = 0,$$

et cette propriété se conserve dans les transformations que l'on peut faire subir à cette équation. Une des plus simples consiste à changer x en $\frac{x+\alpha}{x+\beta}$ donne la transformée

$$(3)\qquad (x+\alpha)^5+\lambda(x+\beta)^5=0,$$

dont l'identification avec l'équation (1) donne

$$\frac{1+\lambda}{a}=\frac{\alpha+\lambda\beta}{b}=\frac{\alpha^2+\lambda\beta^2}{c}=\frac{\alpha^3+\lambda\beta^3}{d}=\frac{\alpha^4+\lambda\beta^4}{e}=\frac{\alpha^5+\lambda\beta^5}{f}.$$

L'élimination de λ entre ces équations conduit aux suivantes :

$$\frac{a\alpha-b}{b-a\beta}=\frac{a\alpha^2-c}{c-a\beta^2}=\frac{a\alpha^3-d}{d-a\beta^3}=\frac{a\alpha^4-e}{e-a\beta^4}=\frac{a\alpha^5-f}{f-a\beta^5},$$

que l'on peut écrire ainsi, après quelques réductions :

$$(4)\qquad a\alpha\beta-b(\alpha+\beta)+c=0,$$

$$(5)\qquad a\alpha\beta(\alpha+\beta)-b(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)+d=0,$$

$$(6)\qquad a\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)-b(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)+e=0,$$

$$(7)\qquad a\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)-b(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)+f=0.$$

Les équations (4) et (5) donnent

$$(8)\qquad \alpha\beta=\frac{bd-c^2}{ac-b^2},\quad \alpha+\beta=\frac{ad-bc}{ac-b^2}.$$

Il ne resterait plus qu'à substituer ces valeurs dans les équations (6) et (7) qui sont symétriques par rapport à α et à β ; mais ce calcul serait compliqué et on peut l'éviter par la considération suivante.

Si l'on prend l'équation aux inverses des racines des équations (1) et (3), on aura

$$(1)'\qquad fx^5+ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=0,$$

$$(3)'\qquad \left(\frac{1}{x}+\alpha\right)^5+\lambda\left(\frac{1}{x}+\beta\right)^5=0.$$

Cette dernière peut s'écrire

$$\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)^5+\frac{\beta^5}{\alpha^5}\lambda\left(x+\frac{1}{\beta}\right)^5=0,$$

ou, en posant $\mu=\frac{\beta^5\lambda}{\alpha^5}$,

$$\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)^5+\mu\left(x+\frac{1}{\beta}\right)^5=0.$$

Or, cette équation est de même forme que l'équation (3), et par suite, comparée à l'équation (1)', elle conduira à des relations qui devront se déduire des équations (8) par le changement de α en $\frac{1}{\alpha}$, de β en $\frac{1}{\beta}$, de $a, b, c\ldots$ en $f, e, d,\ldots$ On aura donc

$$(9)\qquad \frac{1}{\alpha\beta}=\frac{ce-d^2}{df-e^2},\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{cf-de}{df-e^2},$$

ou

$$(10)\qquad \alpha\beta=\frac{df-e^2}{ce-d^2},\quad \alpha+\beta=\frac{cf-de}{ce-d}.$$

La comparaison des équations (8) et (10) donne immédiatement les relations (2), et l'on peut compléter le porisme de M. Faure, qui devient alors un théorème, par l'addition suivante :

Les racines de l'équation (1) *sont de la forme*

$$x=\frac{\beta\sqrt[5]{\lambda}-\alpha}{1-\sqrt[5]{\lambda}},$$

où α et β sont les racines de l'équation

$$(ac-b^2)z^2-(ad-bc)z+bd-c^2=0,$$

et

$$\lambda=\frac{a\alpha-b}{b-a\beta}.$$

14. On aurait pu se contenter, après avoir *deviné* que l'équation (1) devait être réductible à la forme (3), de vérifier si les coefficients de l'équation (3) satisfont aux relations (2); mais cela n'aurait pas appris si les relations (2) sont à la fois nécessaires et suffisantes.

Au reste, on peut trouver d'autres théorèmes du même genre. Par exemple, l'équation (1) serait encore résoluble algébriquement si l'on avait

$$\frac{b^2 - ac}{a^2} = \frac{c^2 - ae}{b^2 + 3ac} = \frac{bc - ad}{2ab},$$

et les racines seraient de la forme...; mais nous laisserons aux lecteurs le plaisir de découvrir eux-mêmes cette forme, si cela les intéresse. P.