PAUL SERRET

Note sur un lieu géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 49-52

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__49_0>

NOTE SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. PAUL SERRET.

Par les extrémités d'une corde fixe *ab* d'une conique donnée C (ou par les extrémités de l'une quelconque des cordes parallèles à celle-là) l'on fait passer une série de coniques Γ homothétiques entre elles; et, menant deux tangentes communes à chacune de ces coniques et à la conique donnée, on demande le lieu décrit par le point de concours de ces tangentes.

Ce problème, qui, abordé de la manière la plus naturelle, donnerait lieu sans doute à une élimination plus que laborieuse, a été résolu très-simplement par MM. les professeurs Mister et Neuberg (novembre 1863, p. 481, *Nouvelles Annales*). On peut toutefois, en conservant leur méthode, qui est parfaite, modifier avec avantage le calcul dans lequel ils l'ont développée; et montrer, dans une notation plus symétrique, en même temps que la solution de la question générale, un exemple de l'utilité que l'on trouve souvent à ne développer pas, dès le commencement, les diverses fonctions qui entrent dans un calcul, et à les retenir, au contraire, jusqu'à la fin, sous leur forme la plus concise.

La courbe fixe donnée et l'une des courbes homothétiques variables ayant, en général, un système de diamètres conjugués de mêmes directions, nous supposerons les axes parallèles à ces diamètres; et en désignant par

$$(o) \qquad Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

la courbe donnée, nous poserons

$$A x^2 + C y^2 + \ldots = \varphi, \qquad A x_0^2 + C y_0^2 + \ldots = \varphi_0;$$

$$A x + D = X, \qquad C y + E = Y;$$

$$A x_0 + D = X_0, \qquad C y_0 + E = Y_0;$$

$$X_0 x + Y_0 y + (D x_0 + E y_0 + F) = P:$$

cette dernière fonction, égalée à zéro, représentant la polaire du point (x_0, y_0) par rapport à la courbe (o).

Ces notations posées, le système des deux tangentes menées, d'un point (x_0, y_0) du lieu, à la courbe donnée, ayant pour équation

$$\varphi \cdot \varphi_0 - P^2 = 0,$$

une conique quelconque, inscrite dans l'angle de ces deux tangentes, est, avec trois paramètres variables α, β, γ,

$$(1) \qquad \varphi \cdot \varphi_0 - P^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0;$$

et si l'on retranche de cette équation l'équation (o) multipliée par φ_0, il vient

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 - P^2 = 0,$$

ou

$$(2) \qquad (\alpha \pm X_0) x + (\beta \pm Y_0) y + (\gamma \pm D x_0 \pm E y_0 \pm F) = 0,$$

équation d'un système de cordes communes aux courbes (o) et (1).

Il reste maintenant à exprimer que la courbe (1) est homothétique à une courbe donnée, telle que

$$(3) \qquad A' x^2 + C' y^2 + D' x + \ldots = 0,$$

et que l'une des cordes (2) est donnée de position, ou de direction seulement.

Or l'équation (1), partiellement développée, est

$$x^2(\alpha^2 - X_0^2 + A\varphi_0) + y^2(\beta^2 - Y_0^2 + C\varphi_0)$$
$$+ 2xy(\alpha\beta - X_0 Y_0) + \ldots = 0;$$

et l'on a, dès lors, entre les deux premiers des trois paramètres variables α, β, γ, les deux relations

$$\text{(I)} \qquad \alpha\beta = X_0 Y_0,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\alpha^2 - X_0^2 + A\varphi_0}{A'} = \frac{\beta^2 - Y_0^2 + C\varphi_0}{C'}.$$

L'une des droites (2) doit coïncider avec la corde donnée ab, $mx + ny + p = 0$; l'on a donc, en outre,

$$\frac{\alpha \pm X_0}{m} = \frac{\beta \pm Y_0}{n} = \frac{\gamma \pm Dx_0 \pm Ey_0 \pm F}{p};$$

ou seulement, puisque le paramètre γ n'entre pas dans les relations (I) et (II),

$$\text{(III)} \qquad \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n} = \mp\left(\frac{X_0}{m} - \frac{Y_0}{n}\right):$$

et il ne reste plus qu'à éliminer α et β entre les équations (I), (II) et (III).

Or, de cette dernière élevée au carré et simplifiée par l'emploi de la relation (I), il résulte

$$\frac{\alpha^2}{m^2} + \frac{\beta^2}{n^2} = \frac{X_0^2}{m^2} + \frac{Y_0^2}{n^2},$$

ou

$$\text{(III')} \qquad \frac{\alpha^2 - X_0^2}{m^2} + \frac{\beta^2 - Y_0^2}{n^2} = 0.$$

Les équations (II) et (III') sont maintenant du premier degré en $\alpha^2 - X_0^2$, $\beta^2 - Y_0^2$; elles donnent

$$\alpha^2 - X_0^2 = \ldots, \qquad \beta^2 - Y_0^2 = \ldots;$$

d'où

$$\alpha^2 = X_0^2 - \frac{m^2(AC' - CA')}{A'n^2 + C'm^2}\varphi_0, \quad \beta^2 = Y_0^2 - \frac{n^2(AC' - CA')}{A'n^2 + C'm^2}\varphi_0:$$

et de ces valeurs substituées dans l'équation (I), ou $\alpha^2\beta^2 = X_0^2 Y_0^2$, il résulte, en supprimant les termes + et $- X_0^2 Y_0^2$, et divisant par le *facteur en évidence* $\frac{AC' - CA'}{A'n^2 + C'm^2}\varphi_0$,

$$\frac{X_0^2}{m^2} - \frac{Y_0^2}{n^2} - \frac{AC' - CA'}{A'n^2 + C'm^2}\varphi_0 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu cherché. Les fonctions X_0, Y_0, φ_0 y ont la signification indiquée, et le lieu est toujours une courbe du second ordre.