NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. PAINVIN

Note sur la détermination des foyers d'une section plane dans une surface du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 481-498

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__481_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE
sur la détermination des foyers d'une section plane dans une surface du second ordre;

PAR M. L. PAINVIN.

I.

1. Le *foyer* d'une courbe plane du second ordre est le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à la courbe; la corde de contact est la *directrice* correspondant à ce foyer. (Cette définition est la *traduction analytique* de la définition ordinaire des foyers.)

Soient α, β, γ les coordonnées d'un foyer de la section faite dans la surface du second ordre

$$(S) \qquad f(x, y, z) = 0$$

par le plan

$$(P) \qquad mx + ny + pz = q;$$

si nous imaginons une sphère de rayon nul ayant son centre en (α, β, γ) sur le plan (P), l'équation de cette sphère sera (en supposant les axes rectangulaires)

$$(\Sigma) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0;$$

et les sections des surfaces (S) et (Σ) par le plan (P) devront être doublement tangentes. On exprimera que cette propriété a lieu, en écrivant que les projections des deux courbes sur un des plans coordonnés sont doublement tangentes. Tel est le principe qu'on peut adopter pour la détermination des foyers d'une section plane.

2. On simplifiera cette recherche en opérant comme il suit :

Transportons les axes au point (α, β, γ), c'est-à-dire posons

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma;$$

les équations de la surface et de la sphère deviennent respectivement

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' + 2B''x'y' \\ \qquad + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma + f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \end{array} \right.$$

$$(2) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0;$$

et, si l'on tient compte de la relation

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = q$$

qui exprime que le centre (α, β, γ) est sur le plan sécant (P), l'équation de ce plan est

$$(3) \qquad mx' + ny' + pz' = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que les projections, sur un des plans coordonnés, des courbes obtenues en coupant les surfaces (1) et (2) par le plan (3) sont doublement tangentes.

Or remarquons que la corde de contact des deux courbes ou la directrice correspondant au foyer (α, β, γ) se trouve dans le plan polaire du point (α, β, γ), c'est-à-dire dans le plan

$$xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma + f'_\delta = 0,$$

ou, dans le nouveau système de coordonnées,

$$x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma + 2f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Ainsi la directrice correspondant au foyer (α, β, γ) a pour équations

$$\left\{\begin{array}{l} mx' + ny' + pz' = 0, \\ x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma + 2f(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \end{array}\right.$$

Mais cette droite est la corde de contact des deux courbes; on devra donc pouvoir satisfaire à l'identité

$$(4)\left\{\begin{array}{l} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'y'z' + 2B''x'y' \\ \quad + x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma + f(\alpha, \beta, \gamma) \\ \quad + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ = k[x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma + 2f(\alpha, \beta, \gamma)]^2, \end{array}\right.$$

en tenant compte de la relation

$$(5) \qquad mx' + ny' + pz' = 0;$$

λ et k sont des constantes arbitraires.

En égalant les termes indépendants, nous trouvons d'abord

$$k = \frac{1}{4f(\alpha, \beta, \gamma)},$$

et l'on voit que l'identité (4) se réduit à

$$4f(\alpha, \beta, \gamma)\left[\begin{array}{l} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' \\ \quad + 2B''x'y' + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2) \end{array}\right] = [x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma]^2.$$

3. « Donc, en résumé, étant donnée la surface du se-
» cond ordre

$$(S) \quad f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

» on obtiendra les coordonnées (α, β, γ) des foyers de la
» section faite dans cette surface par le plan

$$(P) \qquad mx + ny + pz = q,$$

» en écrivant qu'on a identiquement

$$\text{(I)}\quad 4f(\alpha,\beta,\gamma)\begin{bmatrix} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' \\ + 2B''x'y' + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2) \end{bmatrix}$$
$$= [x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma]^2,$$

» après avoir remplacé dans cette équation l'une des » variables x', y' ou z' par sa valeur déduite de la re» lation

$$\text{(II)}\qquad mx' + ny' + pz' = 0.$$

» On obtiendra ainsi trois équations de condition ; on en » déduira, par l'élimination de l'indéterminée λ, deux » équations entre α, β, γ, lesquelles, jointes à la relation

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = q,$$

» permettront de déterminer les foyers de la section. »

Dans le cas des axes obliques, il faudrait prendre pour point de départ l'identité

$$4f(\alpha,\beta,\gamma)\left\{\begin{array}{l} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'x'z' + 2B''x'y' \\ + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos\widehat{yz} \\ \qquad + 2x'z'\cos\widehat{xz} + 2x'y'\cos\widehat{xy}) \end{array}\right\}$$
$$= [x'f'_\alpha + y'f'_\beta + z'f'_\gamma]^2.$$

Remarque. — Si, dans l'application de la règle que je viens d'énoncer, on remplaçait successivement les trois variables x', y', z', on arriverait ainsi à *neuf* relations dont *trois* seulement seraient distinctes ; on pourra profiter de la multiplicité de ces relations pour choisir parmi elles trois relations distinctes et symétriques, et faciliter par là l'élimination.

II.

4. J'appliquerai cette méthode à la question suivante :

Trouver le lieu des foyers des sections centrales faites dans une surface du second ordre.

Prenons pour exemple l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

D'après la règle précédente, il faudra exprimer que l'on a identiquement

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)\left[\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}+\lambda\,(x'^2+y'^2+z'^2)\right]$$
$$=\left(\frac{\alpha x'}{a^2}+\frac{\beta y'}{b^2}+\frac{\gamma z'}{c^2}\right)^2,$$

en tenant compte de la relation

$$mx'+ny'+pz'=0.$$

Posons

$$\mathrm{H}=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1,$$

et éliminons z' : on devra avoir identiquement

$$\mathrm{H}\left\{p^2\frac{x'^2}{a^2}+p^2\frac{y'^2}{b^2}+\frac{(mx'+ny')^2}{c^2}\right.$$
$$\left.+\lambda\left[p^2x'^2+p^2y'^2+(mx'+ny')^2\right]\right\}$$
$$=\left[\frac{p\alpha x'}{a^2}+\frac{p\beta y'}{b^2}-\frac{\gamma}{c^2}(mx'+ny')\right]^2.$$

De là on conclut les trois relations

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{H}\left[\frac{p^2}{a^2}+\frac{m^2}{c^2}+\lambda(p^2+m^2)\right]=\left(\frac{p\alpha}{a^2}-\frac{m\gamma}{c^2}\right)^2,\\
&\mathrm{H}\left[\frac{p^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}+\lambda(p^2+n^2)\right]=\left(\frac{p\beta}{b^2}-\frac{n\gamma}{c^2}\right)^2,\\
&2\mathrm{H}\left(\frac{mn}{c^2}+\lambda mn\right)=2\left(\frac{p\alpha}{a^2}-\frac{m\gamma}{c^2}\right)\left(\frac{p\beta}{b^2}-\frac{n\gamma}{c^2}\right);\\
&\text{et l'on a en outre}\\
&\qquad m\alpha+n\beta+p\gamma=0;
\end{aligned}
\right.
$$

on obtiendra l'équation du lieu cherché en éliminant λ, m, n, p entre les quatre équations (1).

5. Je multiplie d'abord les trois premières de ces relations respectivement par α^2, β^2, $\alpha\beta$ et je les ajoute en ayant égard à la quatrième. On trouve, toutes réductions faites,

$$
(2)\qquad \lambda\mathrm{H}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=\mathrm{H}+1.
$$

Maintenant je développe les deux premières des relations (1), et je substitue au système (1) le suivant

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&m^2\left(\frac{\mathrm{H}}{c^2}+\lambda\mathrm{H}-\frac{\gamma^2}{c^4}\right)+2mp\,\frac{\alpha\gamma}{a^2c^2}+p^2\left(\frac{\mathrm{H}}{a^2}+\lambda\mathrm{H}-\frac{\alpha^2}{a^4}\right)=0,\\
&n^2\left(\frac{\mathrm{H}}{c^2}+\lambda\mathrm{H}-\frac{\gamma^2}{c^4}\right)+2np\,\frac{\beta\gamma}{b^2c^2}+p^2\left(\frac{\mathrm{H}}{b^2}+\lambda\mathrm{H}-\frac{\beta^2}{b^4}\right)=0,\\
&m^2\left(\frac{\mathrm{H}}{b^2}+\lambda\mathrm{H}-\frac{\beta^2}{b^4}\right)+2mn\,\frac{\alpha\beta}{a^2b^2}+n^2\left(\frac{\mathrm{H}}{a^2}+\lambda\mathrm{H}-\frac{\alpha^2}{a^4}\right)=0,\\
&\qquad m\alpha+n\beta+p\gamma=0.
\end{aligned}
\right.
$$

La troisième relation de ce groupe se déduit des trois premières du groupe (1) en les ajoutant après les avoir respectivement multipliées par n^2, m^2, $-mn$, ou bien s'obtient à l'aide de l'identité prise comme point de départ en éliminant y' au lieu de z'.

Ces préparations faites, je remplace α, β, γ par x, y, z, et je pose

$$m = \frac{\mathrm{M}}{a}, \quad n = \frac{\mathrm{N}}{b}, \quad p = \frac{\mathrm{P}}{c},$$

puis

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= \mathrm{H}(1 + \lambda a^2) - \frac{x^2}{a^2}, \\ \mathrm{B} &= \mathrm{H}(1 + \lambda b^2) - \frac{y^2}{b^2}, \\ \mathrm{C} &= \mathrm{H}(1 + \lambda c^2) - \frac{z^2}{c^2}; \end{aligned} \right.$$

les relations du groupe (3) prendront alors la forme

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{CN}^2 + 2\,\mathrm{NP}\frac{yz}{bc} + \mathrm{BP}^2 = 0, \\ &\mathrm{AP}^2 + 2\,\mathrm{PM}\frac{xz}{ac} + \mathrm{CM}^2 = 0, \\ &\mathrm{BM}^2 + 2\,\mathrm{MN}\frac{xy}{ab} + \mathrm{AN}^2 = 0, \\ &\mathrm{M}\frac{x}{a} + \mathrm{N}\frac{y}{b} + \mathrm{P}\frac{z}{c} = 0. \end{aligned} \right.$$

Rappelons-nous qu'on a

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{H} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \\ &\lambda \mathrm{H}(x^2 + y^2 + z^2) = \mathrm{H} + 1. \end{aligned} \right.$$

6. Il suffit maintenant d'éliminer M, N, P entre les trois premières des relations (5), puisque la valeur de λ est connue. Avant d'effectuer cette élimination, je donnerai à ces relations une autre forme en les ajoutant deux par deux et en tenant compte de la quatrième relation;

on obtient ainsi les équations

$$(7)\quad \begin{cases} \left(B + C - 2\dfrac{x^2}{a^2}\right) M^2 + AN^2 + AP^2 = 0, \\ BM^2 + \left(A + C - 2\dfrac{y^2}{b^2}\right) N^2 + BP^2 = 0, \\ CM^2 + CN^2 + \left(A + B - 2\dfrac{z^2}{c^2}\right) P^2 = 0. \end{cases}$$

Le résultat de l'élimination de M^2, N^2, P^2 entre ces trois équations est

$$(8)\quad \begin{vmatrix} B + C - 2\dfrac{x^2}{a^2} & A & A \\ B & A + C - 2\dfrac{y^2}{b^2} & B \\ C & C & A + B - 2\dfrac{z^2}{c^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée se présente, après quelques réductions, sous la forme suivante

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{A+B+C}{2}\left[\begin{array}{c} A\dfrac{x^2}{a^2} + B\dfrac{y^2}{b^2} + C\dfrac{z^2}{c^2} \\ -2\left(\dfrac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + \dfrac{x^2 z^2}{a^2 c^2} + \dfrac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right) \end{array}\right] \\ + A\dfrac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + B\dfrac{x^2 z^2}{a^2 c^2} + C\dfrac{x^2 y^2}{a^2 b^2} + 2\dfrac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^2} - ABC = 0. \end{cases}$$

Remarquons d'abord que le coefficient de $\dfrac{A+B+C}{2}$ est nul; car, en ayant égard aux valeurs (4) de A, B, C et aux relations (6), on a

$$\begin{aligned} & A\frac{x^2}{a^2} + B\frac{y^2}{b^2} + C\frac{z^2}{c^2} - 2\left(\frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + \frac{x^3 z^2}{a^2 c^2} + \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right) \\ & = H(H+1) + \lambda H(x^2 + y^2 + z^2) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 \\ & = H(H+1) + H + 1 - (H+1)^2 \\ & = 0. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation (9) se réduit à

$$(10)\quad \mathrm{ABC} - \left(\mathrm{A}\frac{y^2 z^2}{b^2 c^2} + \mathrm{B}\frac{x^2 z^2}{a^2 c^2} + \mathrm{C}\frac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right) - 2\frac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^2} = 0.$$

Or, cette dernière équation devient, en remplaçant A, B, C par leurs valeurs (4),

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{H}^3(1+\lambda a^2)(1+\lambda b^2)(1+\lambda c^2) \\
-\mathrm{H}^2\left[\begin{array}{r}(1+\lambda b^2)(1+\lambda c^2)\dfrac{x^2}{a^2}+(1+\lambda a^2)(1+\lambda c^2)\dfrac{y^2}{b^2} \\ +(1+\lambda a^2)(1+\lambda b^2)\dfrac{z^2}{c^2}\end{array}\right] \\
+\mathrm{H}\left[(1+\lambda a^2)\dfrac{y^2 z^2}{b^2 c^2}+(1+\lambda b^2)\dfrac{x^2 z^2}{a^2 c^2}+(1+\lambda c^2)\dfrac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right] \\
-\dfrac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^2} - 2\dfrac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^2} \\
-\mathrm{H}\left[(1+\lambda a^2)\dfrac{y^2 z^2}{b^2 c^2}+(1+\lambda b^2)\dfrac{x^2 z^2}{a^2 c^2}+(1+\lambda c^2)\dfrac{x^2 y^2}{a^2 b^2}\right] \\
+3\dfrac{x^2 y^2 z^2}{a^2 b^2 c^4}
\end{array}\right\} = 0.$$

Les réductions sont évidentes, et il reste

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{H}^3(1+\lambda a^2)(1+\lambda b^2)(1+\lambda c^2) \\
-\mathrm{H}^2\left\{\begin{array}{r}(1+\lambda b^2)(1+\lambda c^2)\dfrac{x^2}{a^2} \\ +(1+\lambda a^2)(1+\lambda c^2)\dfrac{y^2}{b^2} \\ +(1+\lambda a^2)(1+\lambda b^2)\dfrac{z^2}{c^2}\end{array}\right\}
\end{array}\right\} = 0.$$

Après quelques transformations faciles, l'équation (11) peut s'écrire

$$\begin{array}{c}
\lambda^3 \mathrm{H}^3 a^2 b^2 c^2 - \lambda^2 \mathrm{H}^2 (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \\
-\lambda^2 \mathrm{H}^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) + \lambda \mathrm{H}(a^2 + b^2 + c^2) + \mathrm{H} = 0,
\end{array}$$

ou enfin

$$
(12)\left\{\begin{aligned}
&\lambda^2 H^2 (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)\\
&-(H+1) - (a^2\lambda H - 1)(b^2\lambda H - 1)(c^2\lambda H - 1) = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Si maintenant on remplace λH par sa valeur (6), on obtient l'équation définitive

$$
(\Sigma)\ (\mathrm{I})\left\{\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\\
&\times\left[\begin{aligned}&(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\\ &\qquad-(x^2+y^2+z^2)^2\end{aligned}\right]\\
&-\left[a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]\\
&\times\left[b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]\\
&\times\left[c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(x^2+y^2+z^2)\right]
\end{aligned}\right\}=0,
$$

équation qu'on peut encore écrire

$$
(\Sigma)\ (\mathrm{II})\left\{\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\\
&\times\left[\begin{aligned}&(b^2-c^2)^2\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+(c^2-a^2)^2\frac{x^2z^2}{a^2c^2}\\ &\qquad+(a^2-b^2)^2\frac{x^2y^2}{a^2b^2}\end{aligned}\right]\\
&-\left[(a^2-b^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2-c^2)\frac{z^2}{c^2}\right]\\
&\times\left[(b^2-c^2)\frac{z^2}{c^2}+(b^2-a^2)\frac{x^2}{a^2}\right]\\
&\times\left[(c^2-a^2)\frac{x^2}{a^2}+(c^2-b^2)\frac{y^2}{b^2}\right]
\end{aligned}\right\}=0.
$$

Telle est l'*équation de la surface lieu des foyers des sections centrales dans l'ellipsoïde.*

On obtiendra l'équation de cette surface dans le cas des hyperboloïdes par le changement de c^2 en $-c^2$ ou de b^2 et c^2 en $-b^2$ et $-c^2$.

7. La surface Σ est du *huitième ordre;* l'origine, c'est-à-dire le centre de la surface du second degré, est un *point sextuple.* Les tangentes proprement dites en ce point sont situées dans les six plans donnés par les termes du sixième degré dans l'équation (II), et ces tangentes ont un contact du second ordre. Les six plans forment trois groupes de deux plans, et il est important de remarquer que ces systèmes de deux plans sont précisément les *plans cycliques* de la surface du second ordre; donc, quelle que soit la surface considérée, *un seul système est réel.*

La section de la surface par un plan quelconque passant par l'origine est une courbe du huitième ordre possédant un point sextuple à l'origine; parmi les six tangentes de ce point sextuple deux seulement sont réelles; ce sont les intersections des plans cycliques réels par le plan sécant.

Les axes de la surface du second ordre sont des *droites doubles* de la surface Σ; nous verrons plus loin que ces droites sont *isolées.* Les plans tangents à la surface à l'origine et menés suivant une de ces droites doubles sont les plans cycliques passant par cette droite.

Sur la surface Σ se trouvent encore les quatre droites imaginaires, intersections des deux surfaces

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0; \end{array}\right.$$

ce fait est mis en évidence par l'équation (I).

Chaque plan cyclique coupe la surface suivant *huit droites : deux* se confondent avec l'axe par lequel passe le plan cyclique considéré ; les *six* autres sont imaginaires et forment deux groupes de trois droites coïncidentes ; ces deux droites distinctes et triples sont les intersections du plan cyclique avec le cône imaginaire

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

ou, ce qui revient au même, deux des génératrices communes aux deux cônes

$$\left\{\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2=0,\\ &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Ainsi chaque plan cyclique coupe la surface suivant huit droites formant trois droites distinctes, une droite double et deux droites triples.

Une droite quelconque située dans un plan cyclique et passant par l'origine rencontre la surface en huit points confondus avec cette origine.

Les *directions asymptotiques* sont distribuées sur les trois cônes

$$(\mathrm{I}^\circ)\qquad x^2+y^2+z^2=0,$$

$$(\mathrm{II}^\circ)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$$

$$(\mathrm{III}^\circ)\quad (b^2-c^2)^2\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+(c^2-a^2)^2\frac{x^2z^2}{a^2c^2}+(a^2-b^2)^2\frac{x^2y^2}{a^2b^2}=0.$$

Ces trois cônes, qui ont pour sommet le centre de la surface du second ordre, ne déterminent pas seulement les directions asymptotiques, mais ils sont, en outre, asymptotes à la surface Σ ; ce sont les enveloppes des plans touchant la surface à l'infini.

Le cône (I°) est un cône imaginaire ou une sphère de rayon nul; la présence de ce facteur nous montre que la surface Σ passe par le cercle imaginaire à l'infini et qu'elle est circonscrite à la sphère de rayon nul ayant pour centre celui de la surface du second degré; le plan de la courbe de contact (courbe imaginaire) est à l'infini.

Les deux autres cônes sont imaginaires dans le cas de l'ellipsoïde, et alors la surface Σ n'a pas de points réels à l'infini; mais ces deux cônes sont réels dans le cas des hyperboloïdes.

Le cône (II°) est le cône asymptote de la surface du second ordre.

Le cône (III°) est un cône du quatrième ordre passant par les axes de la surface du second degré; ces axes sont des arêtes doubles du cône.

Les trois points à l'infini situés sur les droites Ox, Oy, Oz sont des *points doubles* de la surface Σ; les tangentes proprement dites en ces points à l'infini sont situées dans les plans :

$$(a^2-b^2)^2\frac{y^2}{b^2}+(a^2-c^2)^2\frac{z^2}{c^2}=0,$$

pour le point à l'infini sur Ox;

$$(b^2-c^2)^2\frac{z^2}{c^2}+(b^2-a^2)^2\frac{x^2}{a^2}=0,$$

pour le point à l'infini sur Oy;

$$(c^2-a^2)^2\frac{x^2}{a^2}+(c^2-b^2)^2\frac{y^2}{b^2}=0,$$

pour le point à l'infini sur Oz.

(Je n'entrerai pas dans les détails de la détermination de ces plans; ces calculs appartiennent à la théorie de la recherche des points à l'infini sur les surfaces, que je développerai plus tard.)

Ces trois systèmes de deux plans sont imaginaires dans le cas de l'ellipsoïde; deux seulement sont réels et sont toujours réels dans le cas des hyperboloïdes.

Le cône (III°) passe par les quatre génératrices communes aux cônes (I°) et (II°), car l'équation du cône (III°) peut s'écrire

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

8. Ces quelques remarques générales étant faites, nous nous formerons une idée plus complète de la surface Σ en étudiant ses sections planes.

Je n'examinerai que la surface correspondant au cas de l'ellipsoïde et je me contenterai d'indiquer les résultats. Nous supposerons

$$a > b > c.$$

Le plan des yz coupe la surface suivant les deux droites doubles Oz et Oy, et suivant la courbe du quatrième ordre

$$(y^2 + z^2)\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) + (a^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} + (a^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0,$$

courbe imaginaire.

Le plan des xz coupe la surface suivant les deux droites doubles Ox et Oz, et suivant la courbe du quatrième ordre

$$(x^2 + z^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) + (b^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} + (b^2 - a^2)\frac{x^2}{a^2} = 0,$$

courbe réelle ayant un point double réel à l'origine.

Le plan des xy coupe la surface suivant les deux droites doubles Ox et Oy, et suivant la courbe du quatrième ordre

$$(x^2+y^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\left[(a^2-c^2)\frac{x^2}{a^2}+(b^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}\right]=0,$$

courbe réelle et fermée ayant un point double isolé à l'origine.

Un plan perpendiculaire à l'axe des x coupe la surface suivant une courbe du huitième ordre ayant un point double sur l'axe Ox, et les axes de la courbe sont parallèles à Oy et à Oz. Désignons par F_1, F_2, F_3 les foyers des sections principales (yz), (xz), (xy) dans la surface du second ordre. Lorsque le plan sécant coïncide avec yz, on a le segment de droite OF_1; lorsqu'il s'en éloigne un peu, le point double de la courbe est isolé, l'axe parallèle à Oy possède deux sommets réels ainsi que l'axe parallèle à Oz, mais la longueur de l'axe parallèle à Oy a une valeur finie peu différente de OF_1, tandis que celle de l'axe parallèle à Oz est très-petite. Le plan sécant s'éloignant de yz, ces deux axes croissent puis décroissent (il peut arriver néanmoins que l'axe parallèle à Oy décroisse constamment); le point double est toujours isolé. Quand le plan sécant passe par le point F_3

$$(OF_3=\sqrt{a^2-b^2}),$$

l'axe parallèle à Oz devient nul, et l'axe parallèle à Oy a une valeur finie inférieure à OF_1. A partir de cette position, le point double devient réel, l'axe parallèle à Oz est imaginaire et l'axe parallèle à Oy est seul réel. Enfin, lorsque le plan sécant arrive au point F_2

$$(OF_2=\sqrt{a^2-c^2}),$$

l'axe parallèle à Oy devient nul; au delà, les sections sont imaginaires. Ainsi, lorsque le plan sécant se meut en partant du plan des yz, on a un ovale très-aplati dans le sens Oy, puis cet ovale s'élargit; le plan passant par le point F_3, la courbe se présente sous la forme de deux ovales qui se touchent en F_3, la tangente commune est parallèle à Oz; à partir du point F_3, la section prend la forme d'une boucle, le point double est sur Ox et les sommets réels sont sur l'axe parallèle à Oy; enfin la courbe se réduit à un point réel, lorsque le plan sécant passe par le foyer F_2.

J'ai insisté un peu sur les sections parallèles au plan des yz, parce qu'elles nous permettent de saisir plus facilement la forme singulière que présente la surface Σ aux environs de l'axe Ox.

Un plan quelconque parallèle au plan des xz coupe la surface suivant des courbes du huitième ordre ayant un point double *non isolé* sur l'axe Oy; cette courbe a deux sommets réels sur l'axe parallèle à Ox; l'axe parallèle à Oz est toujours imaginaire.

Un plan parallèle au plan des xy coupe la surface suivant une courbe du huitième ordre ayant un point double *isolé* sur l'axe Oz; cette courbe n'a pas de sommet réel sur l'axe parallèle à Oy, sauf le cas où le plan sécant vient coïncider avec le plan des xy. Lorsque ce plan s'élève au-dessus du plan xy, on trouve d'abord *quatre* sommets réels sur l'axe parallèle à Ox; puis les sommets se réduisent à deux, et enfin la courbe devient imaginaire.

Occupons-nous maintenant des sections par des plans passant par les axes Ox, Oy, Oz.

Un plan quelconque passant par l'axe Oz coupe la surface Σ suivant la droite double Oz et suivant une courbe du sixième ordre ayant un point quadruple à l'origine; ce point quadruple ne possède que deux tangentes réelles qui sont les intersections des plans cycliques réels par le plan sécant; l'axe réel de la courbe de section est l'intersection du plan sécant avec le plan des xy. Si l'on imagine le plan sécant d'abord très-voisin du plan zOx, la courbe présentera un point double à l'origine et deux sommets réels situés sur la section de la surface Σ par le plan xOy; lorsque le plan sécant se rapprochera du plan zOy, la courbe de section s'aplatira de plus en plus et se réduira, à la limite, à la droite $F_1OF'_1$, F_1 et F'_1 étant les foyers de la section principale de l'ellipsoïde par le plan zOy.

Imaginons maintenant un plan tournant autour de l'axe Oy. L'intersection de la surface par ce plan est imaginaire tant que l'inclinaison du plan sécant sur le plan xOy est supérieure à celle du plan cyclique (nous faisons abstraction de la droite double Oy). Lorsque le plan sécant vient se placer sur le plan cyclique, la section se compose de droites passant par l'origine, comme nous l'avons vu; enfin, lorsque l'angle du plan sécant est moindre que celui du plan cyclique, on a une courbe du sixième ordre réelle et fermée, possédant un point quadruple isolé à l'origine; cette courbe se réduit au quatrième ordre quand le plan vient coïncider avec le plan des xy.

Un plan tournant autour de l'axe Ox coupe la surface Σ suivant une courbe du sixième ordre ayant un point quadruple à l'origine pour lequel deux tangentes seulement sont réelles. Le plan sécant étant d'abord voisin du plan zOx, puis s'éloignant de ce dernier plan, les deux tangentes réelles au point quadruple font un angle fini, puis cet angle diminue, et les deux tangentes viennent se confondre avec l'axe Oy lorsque le plan sécant coïncide avec xOy. La courbe du sixième ordre se décompose alors en la droite double Oy et en une courbe du quatrième ordre fermée ayant un point double isolé à l'origine.

9. La question que nous venons de résoudre donne lieu à la suivante, lorsque la surface considérée devient un paraboloïde :

Trouver le lieu des foyers des sections par des plans parallèles à l'axe de la surface.

On pourrait déduire des résultats précédents la solution de cette question, mais il est plus simple de l'aborder directement. On trouve ainsi pour le lieu des foyers des sections paraboliques une surface du quatrième ordre dont l'équation est

$$\left(\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}\right)^2-2x\left(\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}\right)+pq\left(\frac{y^2}{p^2}+\frac{z^2}{q^2}\right)=0.$$

La discussion de cette surface n'offre aucune difficulté.

10. J'indiquerai encore le résultat suivant :

Le lieu des foyers des sections d'une surface du second degré par des plans parallèles à un des axes est une surface du quatrième ordre.

Ainsi, pour l'ellipsoïde, le lieu des foyers des sections parallèles à l'axe des x a pour équation

$$\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left[(a^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2-b^2)\frac{z^2}{c^2}+x^2\right]$$
$$-\left[(a^2-c^2)\frac{y^2}{b^2}+(a^2-b^2)\frac{z^2}{c^2}\right]=0.$$