S. RÉALIS

Note sur certaines limites des racines dans les équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 477-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__477_1>

NOTE SUR CERTAINES LIMITES DES RACINES DANS LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. S. REALIS.

Un polynôme $f(x)$ rationnel et entier par rapport à x étant donné, désignons par X l'ensemble de tous les termes de degré pair qu'il contient, y compris le terme indépendant de x, et posons $X = 0$. Admettons que cette équation soit vérifiée par $x^2 = a^2$, a^2 étant un nombre positif quelconque; on en conclura tout de suite que les substitutions $x = a$ et $x = -a$ dans $f(x)$ doivent donner des résultats égaux et de signes contraires. Il suit de là que si l'on pose $f(x) = 0$, cette dernière équation aura nécessairement une racine comprise entre $+a$ et $-a$, et à plus forte raison entre $+l$ et $-l$, l^2 étant une limite supérieure des racines positives a^2 dans $X = 0$.

Cette considération, d'une simplicité rudimentaire, peut être souvent d'une grande utilité pour diriger les essais relatifs à la séparation des racines. On voit, en particulier, que toutes les fois que le premier terme de degré pair d'une équation donnée est de signe contraire au terme tout connu, il est possible d'assigner deux limites, généralement différentes des limites supérieure et inférieure de toutes les racines, et plus faciles à déterminer, lesquelles comprendront nécessairement une ou plusieurs racines de la proposée.

Les propositions qui suivent sont des applications immédiates du principe qu'on vient d'énoncer.

I. L'équation

$$x^{2n} + p_1 x^{2n-1} + p_2 x^{2n-2} + \ldots + p_{2n-2} x^2 + p_{2n-1} x - p_{2n} = 0,$$

dans laquelle tous les termes de degré pair sont positifs et le dernier terme $-p_{2n}$ est négatif (un ou plusieurs des termes intermédiaires pouvant d'ailleurs être nuls), a au moins une racine comprise entre les limites

$$+\sqrt[2n]{p_{2n}} \quad \text{et} \quad -\sqrt[2n]{p_{2n}}.$$

Et, plus généralement, si A désigne la plus petite des n quantités

$$\sqrt[2n]{p_{2n}}, \quad \sqrt[2n-2]{\frac{p_{2n}}{p_2}}, \ldots, \quad \sqrt[2n-2k]{\frac{p_{2n}}{p_{2k}}}, \ldots, \quad \sqrt{\frac{p_{2n}}{p_{2n-2}}},$$

l'équation aura au moins une racine comprise entre $+A$ et $-A$.

II. L'équation

$$x^{2n+1} + p_1 x^{2n} + p_2 x^{2n-1} + \ldots + p_{2n-1} x^2 + p_{2n} x - p_{2n+1} = 0,$$

dans laquelle tous les termes de degré pair sont de signe contraire au dernier terme $-p_{2n+1}$, a au moins une racine comprise entre les limites

$$+\sqrt[2n]{\frac{p_{2n+1}}{p_1}} \quad \text{et} \quad -\sqrt[2n]{\frac{p_{2n+1}}{p_1}},$$

(ou, plus généralement, entre

$$+\sqrt[2n-2k]{\frac{p_{2n+1}}{p_{2k+1}}} \quad \text{et} \quad -\sqrt[2n-2k]{\frac{p_{2n+1}}{p_{2k+1}}};$$

$p_{2k+1}x^{2n-2k}$ étant un terme quelconque de degré pair).

III. Étant donnée l'équation de degré pair

$$x^{2n}+p_1x^{2n-1}+p_2x^{2n-2}+\ldots+p_{2n-1}x-p_{2n}=0,$$

dont le dernier terme est un nombre négatif et les coefficients intermédiaires sont des nombres réels quelconques, considérons les termes négatifs de degré pair $-p_{2a}x^{2n-2a}$, $-p_{2b}x^{2n-2b}$, $-p_{2c}x^{2n-2c},\ldots,-p_{2n}$, et désignons par A et B les deux plus grandes valeurs que prend l'expression $\sqrt[2k]{p_{2k}}$ quand on y fait successivement k égal à a, b, $c,\ldots,n$. L'équation aura au moins une racine comprise entre $+(A+B)$ et $-(A+B)$.

IV. Étant donnée l'équation de degré impair

$$x^{2n+1}+p_1x^{2n}+p_2x^{2n-1}+\ldots+p_{2n}x-p_{2n+1}=0,$$

où les coefficients sont des nombres réels quelconques et le terme tout connu est de signe contraire au premier terme de degré pair $\left(\frac{-p_{2n+1}}{p_1}<0\right)$, considérons les termes de degré pair $-p_{2a+1}x^{2n-2a}$, $-p_{2b+1}x^{2n-2b}$, $-p_{2c+1}x^{2n-2c},\ldots,-p_{2n+1}$, qui ont même signe que le dernier terme, et soient A et B les deux plus grandes valeurs que prend l'expression $\sqrt[2k]{\dfrac{p_{2k+1}}{p_1}}$ quand on y donne à k les valeurs successives a, b, $c, \ldots, n$. L'équation aura au moins une racine entre $+(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ et $-(\mathrm{A}+\mathrm{B})$.

Si $p_1 = 0$, soit $p_{2h+1}x^{2n-2h}$ le premier terme de degré pair (qu'on suppose toujours de signe contraire au dernier terme de l'équation), et désignons par A' et B' les deux plus grandes valeurs de $\sqrt[2k-2h]{\dfrac{p_{2k+1}}{p_{2h+1}}}$ pour $k = a$, b, $c, \ldots, n$. Les nombres $+(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')$ et $-(\mathrm{A}'+\mathrm{B}')$ intercepteront au moins une racine de l'équation.

Remarque. — Le cas où le dernier terme de l'équation du degré $2n+1$ ne serait pas de signe contraire au premier terme de degré pair se ramène immédiatement au cas qu'on vient de traiter. Il suffit pour cela de multiplier l'équation par un facteur réel du second degré, lequel peut toujours être choisi de manière que la condition requise soit remplie, et que les nouvelles racines qu'on introduit soient imaginaires.