NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MOUCHEL

Question du concours général des lycées et des collèges (classe de philosophie)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 473-476

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__473_1>

QUESTION DU CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES ET DES COLLÉGES (CLASSE DE PHILOSOPHIE);

SOLUTION DE M. J. MOUCHEL,
Conducteur des Ponts et Chaussées, à Amiens.

ÉNONCÉ.—*Étant donné un triangle* ABC, *on demande de mener par le point* C *une droite* CD *telle, que la somme des projections des côtés* AC *et* BC *sur cette droite soit égale à une longueur donnée. Discuter le problème.*

Résoudre le même problème par la Trigonométrie.

1° *Solution géométrique.* — Supposons pour un instant le problème résolu, et soient A′, B′ les projections de A, B sur CD, on aura

$$A'B' = m,$$

longueur donnée (*). Par le point B, menons BM parallèle à CD et rencontrant AA′ en M. On a

$$BM = A'B' = m.$$

De plus nous remarquerons que l'angle AMB étant droit, le point M se trouve sur la circonférence décrite sur AB comme diamètre. Il est d'ailleurs sur la circonférence décrite du point B comme centre avec BM comme rayon. De là cette construction :

Décrivez une circonférence sur AB comme diamètre. De l'une des extrémités B du diamètre AB, avec un rayon BM égal à m, décrivez une seconde circonférence qui coupe la première en deux points M et M′; tirez les droites BM, BM′, et par le point C menez à ces droites les parallèles CD, CD′ qui satisfont évidemment à la question.

Les droites BM et BM′ étant symétriques par rapport à AB, CD et CD′ sont symétriques par rapport à la parallèle à AB menée par le point C, et aussi par rapport à la perpendiculaire CH abaissée du point C sur AB.

Le problème a généralement deux solutions; il n'en a qu'une lorsque la longueur donnée est nulle, ou bien lorsqu'elle est égale à AB.

La corde BM ne pouvant jamais surpasser le diamètre AB, il en résulte que AB est la plus grande valeur que puisse prendre la somme des projections des côtés AC, BC du triangle ABC, et, pour que le problème soit pos-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

sible, il faut que la longueur donnée soit égale ou inférieure à AB.

D'ailleurs, la somme des projections des côtés AC et BC peut prendre toutes les valeurs entre o et AB.

2° *Solution trigonométrique.* — La construction faite pour la solution géométrique conduit très-simplement à la solution trigonométrique. En effet, la position de la droite CD est déterminée par l'angle qu'elle fait avec la perpendiculaire CH abaissée du point C sur AB, et rencontrant BM en un point I.

Appelons x cet angle BIH, et désignons par c le côté AB. Nous remarquerons que l'angle

$$\mathrm{BAM} = \mathrm{BIH} = x.$$

D'ailleurs le triangle rectangle MAB donne

$$c \sin \mathrm{MAB} = \mathrm{BM}$$

ou

$$c \sin x = m.$$

De là cette nouvelle construction :

Portez sur AB, à partir du point H, la longueur $\mathrm{HK} = m$; élevez KL perpendiculaire à AB. Du point C comme centre, avec AB comme rayon, décrivez une circonférence qui coupe généralement KL en deux points D et D′; joignez enfin CD et CD′. Ce sont les droites demandées.

A l'inspection de la figure, on aperçoit les mêmes conditions de possibilité et de maximum que précédemment.

Solution directe. — On peut résoudre directement la question par la Trigonométrie, sans passer par la solution géométrique.

Soient a, b, c les trois côtés du triangle ABC. Du point C abaissons la perpendiculaire CH sur AB, et désignons par γ, γ' et x les angles BCH, ACH et HCD. Nous avons, d'après l'énoncé du problème,

$$(1) \qquad a\cos(x-\gamma) - b\cos(x+\gamma') = m.$$

Développons, il vient

$$(2) \quad a(\cos x\cos\gamma + \sin x\sin\gamma) - b(\cos x\cos\gamma' - \sin x\sin\gamma') = m.$$

D'ailleurs

$$\cos\gamma = \sin B, \quad \cos\gamma' = \sin A,$$
$$\sin\gamma = \cos B, \quad \sin\gamma' = \cos A,$$

et la relation (2) devient

$$a(\cos x\sin B + \sin x\cos B) - b(\cos x\sin A - \sin x\cos A) = m$$

ou

$$(3) \quad \cos x(a\sin B - b\sin A) + \sin x(a\cos B + b\cos A) = m.$$

Le multiplicateur de $\cos x$ est nul, le multiplicateur de $\sin x$ est égal à c, et la relation (3) devient

$$c\sin x = m,$$

résultat déjà obtenu.