NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Note sur des questions d'examen (École polytechnique)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 466-471

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__466_1>

NOTE SUR DES QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE);

PAR UN ABONNÉ.

QUESTION 41, p. 85. — *Résoudre l'équation*

$$2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m} = 0,$$

et montrer qu'elle a deux racines réelles.

Il est d'abord évident que cette équation n'admet aucune racine réelle négative. La dérivée du premier membre est $4\cos^2 x$; cette dérivée étant essentiellement positive, la fonction $2x + \sin 2x - \frac{2\pi}{m}$ croît constamment avec x, ce qui montre que l'équation proposée ne peut avoir deux racines réelles.

Pour $x = 0$, le premier membre est négatif; il devient positif pour $x = 1 + \frac{\pi}{m}$; donc l'équation a une racine positive comprise entre 0 et $1 + \frac{\pi}{m}$.

QUESTION 23, p. 84. — *Division d'un polynôme entier $f(x)$ par $x^2 + px + q$. Forme du reste.*

En désignant par $Ax + B$ le reste et par $\varphi(x)$ le quotient, on a

$$(1) \qquad f(x) = (x^2 + px + q)\varphi(x) + Ax + B.$$

Soient α, 6 les racines de $x^2 + px + q = 0$; les substitutions de α et 6 à x, dans l'égalité (1), donnent :

$$(2) \qquad f(\alpha) = A\alpha + B,$$

$$(3) \qquad f(6) = A6 + B,$$

d'où

$$(4) \qquad A = \frac{f(6) - f(\alpha)}{6 - \alpha},$$

$$(5) \qquad B = \frac{6f(\alpha) - \alpha f(6)}{6 - \alpha}.$$

Mais

$$f(6) - f(\alpha) = f[\alpha + (6 - \alpha)] - f(\alpha),$$

ou, d'après le théorème de Taylor,

$$f(6) - f(\alpha) = f'(\alpha).(6 - \alpha)$$
$$+ \frac{1}{1.2}f''(\alpha)(6 - \alpha)^2 + \frac{1}{1.2.3}f'''(\alpha)(6 - \alpha)^3 + \ldots$$

Donc

$$(6)\quad A = f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha).(6-\alpha) + \frac{1}{1.2.3} f'''(\alpha).(6-\alpha)^2 + \ldots$$

L'égalité (5)

$$B = \frac{6 f(\alpha) - \alpha f(6)}{6-\alpha}$$

revient à

$$B = f(\alpha) - \frac{\alpha[f(6) - f(\alpha)]}{6-\alpha};$$

d'où

$$B = f(\alpha) - \alpha . A,$$

ce qui donne, en remplaçant A par sa valeur (égalité 6),

$$(7)\quad B = f(\alpha) - \alpha \left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha).(6-\alpha) + \ldots \right].$$

Par conséquent, le reste de la division considérée est

$$x \left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha).(6-\alpha) + \ldots \right]$$

$$+ f(\alpha) - \alpha \left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} \cdot f''(\alpha).(6-\alpha) + \ldots \right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(\alpha) + (x-\alpha) \left[f'(\alpha) + \frac{1}{1.2} f''(\alpha)\ (6-\alpha) + \ldots \right].$$

Lorsque les racines α, 6 de l'équation $x^2 + px + q = 0$ sont égales entre elles, on a

$$6 - \alpha = 0,$$

et le reste de la division se réduit à

$$f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha).$$

Dans ce cas, le quotient $\varphi(x)$ de la division a pour valeur

$$\frac{1}{1.2}f''(\alpha)+\frac{1}{1.2.3}(x-\alpha)f'''(\alpha)+\ldots$$

C'est ce qui résulte évidemment de la formule connue

$$f(x)=f(\alpha)+(x-\alpha)f'(\alpha)$$
$$+\frac{1}{1.2}(x-\alpha)^2.f''(\alpha)+\frac{1}{1.2.3}(x-\alpha)^3.f'''(\alpha)+\ldots$$

Question 121, p. 183.— *Quand deux angles trièdres trirectangles ont un même sommet, leurs six arêtes sont sur un même cône du second degré.*

Prenons pour axes de coordonnées les trois arêtes de l'un des trièdres ; l'équation générale des cônes du second degré, passant par ces trois arêtes, est

$$(1)\qquad Axy+Bxz+Cyz=0,$$

A, B, C représentant des paramètres arbitraires.

Actuellement, nommons α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'', les angles que les trois arêtes du second trièdre forment respectivement avec les axes des coordonnées. Ces arêtes ont pour équations

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma},$$
$$\frac{x}{\cos\alpha'}=\frac{y}{\cos\beta'}=\frac{z}{\cos\gamma'},$$
$$\frac{x}{\cos\alpha''}=\frac{y}{\cos\beta''}=\frac{z}{\cos\gamma''};$$

et pour qu'elles appartiennent, toutes trois, à l'un des cônes représentés par l'équation (1), il faut qu'il existe pour A, B, C des valeurs satisfaisant à la fois aux trois équations

$$(2)\quad A\cos\alpha\cos\beta + B\cos\alpha\cos\gamma + C\cos\beta\cos\gamma = 0,$$

$$(3)\quad A\cos\alpha'\cos\beta' + B\cos\alpha'\cos\gamma' + C\cos\beta'\cos\gamma' = 0,$$

$$(4)\quad A\cos\alpha''\cos\beta'' + B\cos\alpha''\cos\gamma'' + C\cos\beta''\cos\gamma'' = 0.$$

Les deux premières déterminent les rapports $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ et par conséquent le cône. Il s'agit donc de faire voir que toute solution des équations (2) et (3) vérifie l'équation (4); autrement dit, il faut prouver que l'une de ces trois équations se déduit des deux autres.

Or, en additionnant membre à membre les trois équations (2), (3), (4) il vient :

$$(5)\quad \left.\begin{array}{l} A(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'') \\ + B(\cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'') \\ + C(\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'') \end{array}\right\} = 0.$$

Cette dernière est vérifiée quelles que soient les valeurs de A, B, C, car on a :

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' = 0,$$

$$\cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'' = 0,$$

$$\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' = 0,$$

puisque α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'' représentent les angles que les axes des coordonnées OX, OY, OZ forment avec les trois arêtes rectangulaires du second trièdre.

D'après cela, on voit que toute solution commune à deux quelconques des équations (2), (3), (4) satisfait à la troisième : c'est ce qu'il fallait démontrer.

Question 131, p. 184. — *Étant donnés une surface du second degré et un point fixe, on mène par ce point toutes les cordes dont ce point est le milieu. Lieu de ces droites.*

Soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

l'équation de la surface rapportée à un système d'axes quelconques passant par le point donné pris pour origine. Les équations d'une droite menée par ce point sont

$$(1) \qquad x = mz, \quad y = nz,$$

et, pour que cette droite rencontre la surface en deux points également distants de l'origine, il faut que

$$(2) \qquad Cm + C'n + C'' = 0.$$

En éliminant m et n entre les relations (1) et (2), il vient

$$Cx + C'y + C''z = 0;$$

c'est l'équation du lieu cherché.