Nouvelles annales de mathématiques

H. Lemonnier

De l'homothétie dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 461-465

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__461_1>

DE L'HOMOTHÉTIE DANS LES CONIQUES;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur au lycée Saint-Louis.

Soit

$$f(xy) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

l'équation d'une première conique, et soit

$$\varphi(x'y') = A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

celle d'une seconde conique semblable et homothétique à la première.

Désignons par α, β les coordonnées du point qui dans le système de la seconde conique est homologue à l'origine.

Nous aurons

$$x' - \alpha = \frac{x}{k}, \qquad y' - \beta = \frac{y}{k},$$

k étant le rapport de similitude de la première conique à la seconde. Il en résulte

$$\begin{aligned} A'\left(\frac{x}{k}+\alpha\right)^2 + B'\left(\frac{x}{k}+\alpha\right)\left(\frac{y}{k}+\beta\right) + C'\left(\frac{y}{k}+\beta\right)^2 \\ + D'\left(\frac{x}{k}+\alpha\right) + E'\left(\frac{y}{k}+\beta\right) + F' = 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} A'x^2 + B'xy + C'y^2 + k(2A'\alpha + B'\beta + D')x \\ + k(B'\alpha + 2C'\beta + E')y \\ + k^2(A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F') = 0. \end{aligned}$$

De là les relations

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \frac{k(2A'\alpha + B'\beta + D')}{D} = \frac{k(B'\alpha + 2C'\beta + E')}{E} \\ = \frac{k^2(A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F')}{F}. \end{aligned}$$

On a ainsi les deux conditions

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C},$$

puis trois équations pour déterminer α, β et k.

L'élimination de k donne

$$\frac{2A'\alpha + B'\beta + D'}{D} = \frac{B'\alpha + 2C'\beta + E'}{E},$$

$$\frac{A}{A'}\frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2} = \frac{A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'}{F}.$$

Si les deux courbes ont un centre, il doit résulter de là deux systèmes de valeurs pour α et β, déterminant deux points symétriques l'un de l'autre à l'égard du centre de la seconde conique, et deux valeurs de k correspondantes, égales et de signes contraires. Mais pour des paraboles, il n'en doit résulter qu'un seul système de valeurs de α, β et k.

C'est chose aisée à établir par l'analyse suivante.

Premier cas. — Soient a et b les coordonnées du centre de la seconde conique, de sorte que

$$2A'a + B'b + D' = 0,$$
$$B'a + 2C'b + E' = 0.$$

Posons

$$\alpha = a + \alpha',$$
$$\beta = b + \beta'.$$

Il s'ensuit

$$2A'\alpha + B'\beta + D' = 2A'\alpha' + B'\beta',$$
$$B'\alpha + 2C'\beta + E' = B'\alpha' + 2C'\beta',$$

et

$$A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'$$
$$= A'\alpha'^2 + B'\alpha'\beta' + C'\beta'^2 + \frac{D'a + E'b}{2} + F',$$

ce qui transforme les deux équations précédentes en

$$\frac{2A'\alpha' + B'\beta'}{D} = \frac{B'\alpha' + 2C'\beta'}{E},$$

$$\frac{A}{A'}\frac{(2A'\alpha' + B'\beta')^2}{D^2} = \frac{A'\alpha'^2 + B'\alpha'\beta' + C'\beta'^2 + \frac{D'a + E'b}{2} + F'}{F}$$

avec

$$k = D\frac{A'}{A}\frac{1}{2A'\alpha' + B'\beta'}.$$

On voit que ces équations déterminent deux couples de valeurs, pour α' et β', égales et de signes contraires, ainsi que des valeurs de k égales aussi et de signes contraires.

Deuxième cas. — Soit

$$B^2 - 4AC = 0$$

avec

$$B'^2 - 4A'C' = 0.$$

L'équation

$$\frac{A}{A'}\frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2} = \frac{A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'}{F}$$

peut se changer en

$$\frac{A}{A'}\frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2}$$

$$= \frac{A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + \dfrac{B'^2}{4A'}\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'}{F},$$

d'où

$$\frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2}$$

$$= \frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2 - 2(B'D' - 2A'E')\beta - (D'^2 - 4A'F')}{4AF}$$

$$= \frac{2(B'D' - 2A'E')\beta + D'^2 - 4A'F'}{D^2 - 4AF}.$$

On trouvera d'une façon semblable

$$\frac{(B'\alpha + 2C'\beta + E')^2}{E^2} = \frac{2(B'E' - 2C'D')\alpha + E'^2 - 4C'F'}{E^2 - 4CF}.$$

En conséquence, α et β sont données par les équations

$$\frac{2A'\alpha + B'\beta + D'}{D} = \frac{B'\alpha + 2C'\beta + E'}{E},$$

$$\frac{2(B'D' - 2A'E')\beta + D'^2 - 4A'F'}{D^2 - 4AF}$$

$$= \frac{2(B'E' - 2C'D')\alpha + E'^2 - 4C'F'}{E^2 - 4CF},$$

toutes deux du premier degré.

Il s'ensuit bien pour α, β, k un seul système de valeurs.