Nouvelles annales de mathématiques

Houël

Notice sur les fonctions hyperboliques et sur quelques tables de ces fonctions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 416-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__416_1>

NOTICE SUR LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES ET SUR QUELQUES TABLES DE CES FONCTIONS;

PAR M. HOÜEL,
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

1. D'après leur définition géométrique, le cosinus et le sinus d'un angle sont les coordonnées rectangles du point correspondant d'une circonférence décrite du sommet de l'angle comme centre, avec l'unité pour rayon. L'équation de ce cercle peut être remplacée par les deux équations

$$(1) \qquad x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

les fonctions $\cos t$, $\sin t$ satisfaisant à la relation fondamentale

$$(2) \qquad \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

On peut remarquer que le nombre t, qui mesure l'angle évalué en parties du rayon, mesure en même temps le double de l'aire du secteur circulaire correspondant, de sorte que l'on peut considérer, au lieu de l'angle, le double du secteur compris entre ses côtés.

On a très-anciennement aperçu l'analogie qui existe entre le cercle et l'hyperbole équilatère, et la considération des secteurs hyperboliques est devenue importante depuis que Mercator a découvert leur expression au moyen des logarithmes (*Logarithmotechnia*, 1668). En traitant la multiplication des aires hyperboliques, Moivre (*) a trouvé, entre les ordonnées y et y_n des points d'une hyperbole de demi-axe $= 1$ correspondants à des secteurs dont le second est égal à n fois le premier, la relation

$$\sqrt{1+y_n^2}+y_n=(\sqrt{1+y^2}+y)^n, \tag{3}$$

qui se déduit immédiatement de l'expression logarithmique du double secteur hyperbolique,

$$u=\log(\sqrt{1+y^2}+y)=\log\frac{1}{\sqrt{1+y^2}-y}, \tag{4}$$

ou, si l'on veut, en ayant égard à l'équation de l'hyperbole,

$$x^2-y^2=1, \tag{5}$$

$$u=\log(x+y)=\log\frac{1}{x-y}. \tag{6}$$

L'équation du cercle se déduisant de celle de l'hyperbole (**) par le changement de y en $\pm y\sqrt{-1}$, Moivre en conclut que la relation qui existe entre les ordonnées des points du cercle qui correspondent à des secteurs dont l'un est égal à n fois l'autre, est de la forme

$$\sqrt{1-y_n^2}\pm y_n\sqrt{-1}=(\sqrt{1-y^2}\pm y\sqrt{-1})^n,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos nt\pm\sqrt{-1}\sin nt=(\cos t\pm\sqrt{-1}\sin t)^n,$$

(*) *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, 1730.

(**) Il est entendu qu'il s'agira toujours ici de l'hyperbole *équilatère*.

C'est ainsi qu'il est parvenu au théorème fondamental qui porte son nom.

En comparant les développements en série des fonctions exponentielles et circulaires, on arrive à la formule

$$e^{\pm t\sqrt{-1}} = \cos t \pm \sqrt{-1}\sin t,$$

d'où l'on tire

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \cos t = \dfrac{e^{t\sqrt{-1}} + e^{-t\sqrt{-1}}}{2}, \\ y = \sin t = \dfrac{e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Ces formules expriment les coordonnées du cercle en fonction d'exponentielles imaginaires ayant pour exposant le double secteur circulaire.

Or, des équations (4) ou (6) on tire, pour les coordonnées de l'hyperbole, exprimées en fonction du double secteur hyperbolique, les valeurs

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}, \\ y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}, \end{cases}$$

qui ne diffèrent des formules (7) que par le changement de t en $u\sqrt{-1}$, et de y en $y\sqrt{-1}$. On peut donc représenter les coordonnées de l'hyperbole par les formules

$$(9)\qquad x = \cos\left(u\sqrt{-1}\right), \quad y = \frac{\sin\left(u\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{-1}}.$$

De même que toutes les formules de la Trigonométrie relatives à l'addition, à la multiplication et à la division des arcs ou des secteurs circulaires peuvent se déduire en traitant par l'Algèbre les formules (7), de même toutes les formules analogues relatives aux secteurs hyperboliques pourront se déduire, soit directement, des formules (8), soit immédiatement, des formules relatives aux arcs ou aux secteurs circulaires, en remplaçant partout

$$t, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t$$

respectivement par

$$u\sqrt{-1}, \quad x = \cos(u\sqrt{-1}), \quad y\sqrt{-1} = \sin(u\sqrt{-1}).$$

2. Il était naturel de songer à désigner les coordonnées de l'hyperbole par une notation qui rappelât l'analogie de leurs propriétés avec les coordonnées $\cos t$, $\sin t$ du cercle. Cette idée a été réalisée pour la première fois par Friedr. Mayer, de l'Académie de Pétersbourg, un des contemporains de Moivre. Dans le courant du siècle dernier, Vincent Riccati, Saladini, Foncenex et surtout Lambert se sont occupés de ces fonctions, et ce dernier en a donné une petite Table dans le recueil qu'il a publié en 1770 (*). Les propriétés de ces fonctions se trouvent aussi exposées dans le *Cours de Mathématiques* de Sauvi (1776), t. IV, p. 222 et suiv., et dans le *Dictionnaire mathématique*, art. GÉOMÉTRIE, t. II, p. 592 (1805).

Dans ces dernières années, Gudermann a fait paraître dans le *Journal de Crelle* (t. VI et suiv.) un long travail sur les *fonctions hyperboliques*, suivi de tables étendues, et qui a été réuni en un volume sous le titre de : *Theorie der potenzial- oder cyclisch-hyperbolischen Functionen* (Berlin, 1833, 1 vol. in-4, 158 pages de texte, 196 de Tables).

Enfin deux nouveaux recueils de Tables de fonctions hyperboliques viennent d'être publiés, en 1863, l'un à Dantzig par M. Gronau, l'autre à Pise par M. Angelo Forti.

(*) *Voyez* le Bulletin de bibliographie des *Nouvelles Annales*, année 1855, p. 28.

Avant de décrire ces diverses Tables, disons quelques mots sur les notations adoptées pour représenter les fonctions hyperboliques.

3. On a désigné depuis longtemps les coordonnées de l'hyperbole, données par les formules (8), sous le nom de *cosinus hyperbolique* et de *sinus hyperbolique,* et on les a représentées, en abrégeant plus ou moins la notation, par les initiales des mots *cosinus* et *sinus*, suivies de la lettre h. Nous écrirons de cette manière

$$x = \mathrm{Ch}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

$$y = \mathrm{Sh}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

en y joignant, par analogie avec la *tangente circulaire,* la *tangente hyperbolique*

$$\mathrm{Th}\, u = \frac{\mathrm{Sh}\, u}{\mathrm{Ch}\, u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

D'après cette notation, les formules (9) deviennent

$$\mathrm{Ch}\, u = \cos(u\sqrt{-1}), \qquad \sqrt{-1}\,\mathrm{Sh}\, u = \sin(u\sqrt{-1}),$$

d'où

$$\sqrt{-1}\,\mathrm{Th}\, u = \mathrm{tang}(u\sqrt{-1}).$$

On en tire, réciproquement,

$$\cos t = \mathrm{Ch}(t\sqrt{-1}), \qquad \sqrt{-1}\sin t = \mathrm{Sh}(t\sqrt{-1}),$$

$$\sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\, t = \mathrm{Th}(t\sqrt{-1}).$$

Telles sont les relations qui lient entre elles les fonctions hyperboliques et circulaires.

En les comparant aux formules d'Abel et de Jacobi pour le passage des arguments réels aux arguments imaginaires dans la théorie des fonctions elliptiques, on voit qu'elles sont un cas particulier des formules qui servent à exprimer les fonctions elliptiques d'un argument imaginaire au moyen des fonctions d'un argument réel relatives au module complémentaire, les fonctions circulaires et hyperboliques correspondant aux modules complémentaires o et 1.

De cette remarque résulte immédiatement la représentation des fonctions hyperboliques au moyen des fonctions circulaires d'un arc lié à l'argument u comme l'est plus généralement l'amplitude à l'argument d'une fonction elliptique. Nous désignerons cette amplitude, relative au module 1, sous le nom d'*amplitude hyperbolique* de l'argument u, et nous la représenterons par le signe $\mathrm{Amh}\,u$.

Soit que l'on particularise les formules relatives aux fonctions elliptiques, soit que l'on compare la relation

$$\mathrm{Ch}^2 u - \mathrm{Sh}^2 u = 1,$$

qui a lieu entre les fonctions hyperboliques, à la relation

$$\mathrm{séc}^2 \tau - \mathrm{tang}^2 \tau = 1,$$

qui a lieu entre les fonctions circulaires, on est conduit à identifier les fonctions hyperboliques de u avec les fonctions circulaires d'un certain angle τ, lié à u par les relations

$$\mathrm{Ch}\,u = \mathrm{séc}\,\tau, \quad \mathrm{Sh}\,u = \mathrm{tang}\,\tau, \quad \mathrm{Th}\,u = \sin\tau,$$

dont chacune entraîne les deux autres. C'est cet angle τ que nous appellerons l'*amplitude hyperbolique* de u,

$$\tau = \mathrm{Amh}\,u.$$

Gudermann désigne cet angle sous le nom de *longitude* (*longitudo, Longitudinalzahl*), et le représente par la notation

$$\tau = lu \quad (^*).$$

(*) Lambert et, d'après lui, MM. Mossotti et Forti ont nommé cet angle τ l'*angle transcendant* correspondant au double secteur hyperbolique u. Il est très-facile d'avoir la représentation géométrique de cet angle dans l'hyperbole.

Réciproquement, il désigne l'argument u, considéré comme fonction de τ, sous le nom de *longueur* (*Länge*, *Längezahl*), et le représente par la caractéristique $\mathfrak{L}$,

$$u = \mathfrak{L}\,\tau.$$

En résolvant l'une des équations

$$\text{séc}\,\tau = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \text{tang}\,\tau = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \sin\tau = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

par rapport à u, on trouve la relation qui existe entre les deux variables u et τ,

$$u = l.\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right),$$

d'où, réciproquement,

$$\tau = \text{Amh}\,u = 2\,\text{arc tang}\,e^u - \frac{\pi}{2}.$$

On obtient toutes les valeurs réelles de l'argument u, de $-\infty$ à $+\infty$, en faisant varier l'amplitude τ depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$.

4. Donnons maintenant une idée des Tables de Gudermann et de celles de M. Gronau qui ne diffèrent des premières que par d'heureuses modifications de détail.

Si l'on peut trouver, pour chaque valeur de u, la valeur correspondante de l'amplitude τ, et *vice versâ*, on obtiendra, d'après ces formules, les fonctions hyperboliques de u en cherchant dans les Tables trigonométriques ordinaires les fonctions circulaires de τ; et réciproquement, en cherchant la valeur de τ correspondante à l'une des fonctions hyperboliques de u, en vertu des mêmes formules, on aura la valeur de u qui répond à l'amplitude τ.

C'est d'après cette méthode que Gudermann a construit sa première Table, laquelle donne, pour les diverses valeurs de $\tau = \text{Amh}\, u$, de dix-millième en dix-millième du quadrant, ou de $32'',4$ en $32'',4$, les valeurs correspondantes de $u = \mathfrak{L}\tau$, avec sept décimales. L'emploi de cette Table exige qu'on y joigne une Table trigonométrique ordinaire, et de préférence une Table construite suivant la division décimale du quadrant, telle que celles de Borda, de Callet ou de Plauzoles.

Lorsque l'argument u est très-considérable, ou l'angle τ très-voisin de $\frac{\pi}{2}$, l'interpolation par parties proportionnelles devient impraticable. Pour remédier à cet inconvénient, Gudermann a construit une seconde Table donnant directement, pour les valeurs de u plus grandes que 2, les logarithmes des trois fonctions hyperboliques $\text{Ch}\, u$, $\text{Sh}\, u$, $\text{Th}\, u$. Pour les valeurs de u qui dépassent 12, limite de cette seconde Table, on a sensiblement

$$\text{Th}\, u = 1, \quad \text{Ch}\, u = \text{Sh}\, u = \frac{1}{2} e^u.$$

En désignant donc par la caractéristique L les logarithmes vulgaires ou décimaux, et par M le module du système décimal, on pourra prendre

$$\text{L.Th}\, u = 0,$$
$$\text{L.Ch}\, u = \text{L.Sh}\, u = \text{M}u - \text{L.2}.$$

On obtient facilement $\text{M}u$ à l'aide de la Table de conversion des logarithmes naturels en logarithmes vulgaires.

5. Les Tables de Gudermann présentent quelques inconvénients dans la pratique. L'emploi de la première Table exige deux lectures dans deux volumes différents. D'autre part, la seconde Table est incomplète, puisqu'elle ne donne pas les fonctions hyperboliques des arguments moindres que 2.

M. Gronau a évité ces inconvénients, en réunissant la Table des fonctions $u = \mathfrak{L}\tau$ à une Table trigonométrique donnant les logarithmes des fonctions circulaires de τ, de sorte que l'on trouve directement, à côté de chaque valeur de u, ou plutôt de Mu, les logarithmes des fonctions hyperboliques de u.

Il y a divers avantages à introduire dans la Table, au lieu de l'argument u lui-même, son produit par le module M. D'abord, lorsque u est très-considérable et τ très-voisin de $\frac{\pi}{2}$, l'accroissement des logarithmes vulgaires de $\mathrm{Ch}\,u$ et de $\mathrm{Sh}\,u$ est sensiblement égal à l'accroissement de Mu, ce qui simplifie beaucoup l'interpolation de la Table. Cette substitution offre encore certaines facilités dans le calcul des fonctions elliptiques. Dans le cas où u est donné directement, la multiplication que cette disposition exige se fait presque à simple vue au moyen de la Table de conversion dont nous avons parlé.

La Table de M. Gronau est munie, comme les Tables trigonométriques ordinaires, d'un double argument, tant pour les valeurs de τ que pour les valeurs correspondantes de u. Elle donne, pour l'argument de gauche, variant de 0 à 90 degrés, les valeurs logarithmiques de

$$\mathrm{Th}\,u = \sin\tau,\quad \mathrm{Ch}\,u = \mathrm{séc}\,\tau,\quad \mathrm{Sh}\,u = \mathrm{tang}\,\tau,$$

et pour l'argument de droite, variant de 90 degrés à 0, les valeurs de

$$\frac{1}{\mathrm{Ch}\,u} = \cos\tau,\quad \frac{1}{\mathrm{Th}\,u} = \mathrm{cosec}\,\tau,\quad \frac{1}{\mathrm{Sh}\,u} = \cot\tau.$$

Il eût été, selon nous, préférable, au lieu de disposer toutes ces valeurs à la suite les unes des autres, de les disposer de manière que les six fonctions circulaires d'un même angle se trouvassent sur deux pages en regard, de manière, par exemple, que l'on eût trouvé vis-à-vis l'un de l'autre les logarithmes du sinus et du cosinus d'un même angle. La disposition eût été celle de la *Trigonometria Britannica* de Briggs, et de plusieurs autres recueils, et l'on aurait augmenté notablement la commodité de la Table, sans y inscrire un seul chiffre de plus.

Nous ne pouvons enfin nous empêcher de regretter que M. Gronau ait cru devoir abandonner la division décimale du quadrant, employée par Gudermann, et revenir à la division sexagésimale, dont un préjugé traditionnel maintient, sans aucune raison solide, l'usage dans les calculs qui ne concernent pas directement l'astronomie d'observation ou la navigation. Ce sacrifice à la coutume entraîne, dans bien des cas, des réductions embarrassantes, que l'on aurait évitées complétement en adoptant la division rationnelle du cercle.

En résumé, les Tables de M. Gronau sont d'un emploi très-commode, et, en attendant que la France en possède de semblables, nous ne saurions trop en recommander l'acquisition aux personnes qui pensent, comme nous, que la pratique intelligente et *modérée* du calcul numérique est un utile moyen pour éclaircir la théorie.

6. Il nous reste à parler des Tables de M. Forti. Pour en donner une idée, concevons que sur le même diamètre $= 2$ on ait décrit un cercle et une hyperbole équilatère. Menons un rayon faisant avec le diamètre commun un angle t, lequel mesurera le double du secteur circulaire, et soit u le double du secteur hyperbolique correspondant. Les coordonnées des points où le rayon rencontre les deux courbes seront $\cos t$, $\sin t$ pour le cercle, et $\mathrm{Ch}\, u$, $\mathrm{Sh}\, u$ pour l'hyperbole, et la proportionnalité de ces coordonnées donnera évidemment

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\mathrm{Sh}\, u}{\mathrm{Ch}\, u} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} t = \mathrm{Th}\, u.$$

De cette relation on tire

$$e^{2u} = \frac{1 + \tang t}{1 - \tang t} = \tang\left(\frac{\pi}{4} + t\right),$$

d'où

$$u = \frac{1}{2} \log \tang\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \frac{1}{2} \mathfrak{L}(2t),$$

et

$$t = \frac{1}{2} \operatorname{Amh}(2u).$$

Quant aux fonctions hyperboliques de u, autre que $\operatorname{Th} u$, elles sont liées aux fonctions circulaires de t par des relations assez compliquées. On se rend donc difficilement compte des raisons qui ont pu déterminer M. Forti à subordonner sa Table des fonctions hyperboliques de u à la Table des fonctions circulaires de t, les deux Tables n'ayant entre elles aucune liaison naturelle, et leur juxtaposition n'étant d'aucune utilité dans la pratique.

Le volume publié par M. Forti comprend deux Tables, dont la première contient huit colonnes disposées sur deux pages en regard. Les pages de gauche contiennent une reproduction exacte des Tables trigonométriques à cinq décimales de Lalande, et donnent ainsi les fonctions circulaires de l'angle t, de minute en minute. Les pages de droite contiennent, pour les mêmes valeurs de l'angle $t = \frac{1}{2} \operatorname{Amh}(2u)$ les valeurs correspondantes des quatre quantités

$$\tau = \operatorname{Amh} u, \quad \mathrm{L}.\operatorname{Ch} u, \quad \mathrm{L}.\operatorname{Sh} u, \quad \mathrm{L}.u.$$

La seule colonne de la page à gauche qui ait quelque rapport avec les fonctions hyperboliques est celle qui donne

$$\mathrm{L}.\tang t = \mathrm{L}.\operatorname{Th} u.$$

En outre, la Table de fonctions hyperboliques offre le double inconvénient d'avoir pour argument Lu au lieu du nombre u lui-même ou de son produit par M, et de devenir par cela même d'un usage impraticable pour les valeurs de u très-considérables, ou pour les valeurs de τ voisines de 90 degrés.

La seconde Table donne, pour les diverses valeurs de $\frac{1}{2}\tau$, croissant de minute en minute, les valeurs correspondantes de u et de

$$\mathrm{L.tang}\, t = \mathrm{L.sin}\, \tau = \mathrm{L.Th}\, u.$$

Cette Table, qui exige concurremment l'emploi de la première, nous semble d'un usage peu commode.

Nous ne pouvons donc énoncer sur l'ouvrage de M. Forti une appréciation aussi favorable que sur celui de M. Gronau, et nous sommes même loin de partager l'avis de l'auteur de la préface, lorsqu'il déclare ne trouver d'autre mérite au Traité de Gudermann que les exemples pratiques qu'il renferme (*). Malgré leurs imperfections, les Tables de Gudermann nous semblent de beaucoup supérieures dans la pratique à celles de M. Forti, surtout quand il s'agit des applications à la théorie des fonctions elliptiques, auxquelles rien ne fait allusion dans le recueil italien, et qui constituent cependant l'emploi le plus important des fonctions hyperboliques.

7. Indiquons, en terminant cette Note, quelques applications des fonctions hyperboliques, pour montrer l'usage des nouvelles Tables.

1° Soit proposé de résoudre l'équation du troisième

(*) « Le sue tavole però sono incomode; e il solo merito che noi revvisiamo nel suo lavoro sulle funzioni iperboliche consiste nell' aggiunta ch' egli ha fatto di varie e nuove applicazioni. »

degré, dans le cas où une seule des racines est réelle. En procédant d'une manière analogue à celle qui conduit à la résolution par les fonctions circulaires dans le cas où les trois racines sont réelles, on identifiera l'équation privée de second terme

$$x^3 \mp px + q = 0$$

(p étant positif et q de signe quelconque) avec l'une des équations

$$4\,\mathrm{Ch}^3\frac{u}{3} - 3\,\mathrm{Ch}\frac{u}{3} - \mathrm{Ch}\,u = 0,$$

$$4\,\mathrm{Sh}^3\frac{u}{3} + 3\,\mathrm{Sh}\frac{u}{3} - \mathrm{Sh}\,u = 0,$$

qui donnent la trisection de l'argument u. Dans le cas où le second terme a le signe —, par exemple, on déterminera l'argument u par la formule

$$\mathrm{Ch}\,u = -\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}},$$

le radical étant pris avec un signe tel, que le second membre soit positif, et les trois racines de l'équation seront (le radical étant pris avec le même signe)

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{Ch}\frac{u}{3},$$

$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\mathrm{Ch}\frac{u}{3} \pm \sqrt{-3}\,.\,\mathrm{Sh}\frac{u}{3}\right)$$

$$= -\frac{x_1}{2} \mp \sqrt{-p}\,.\,\mathrm{Sh}\frac{u}{3}.$$

Ces formules sont, comme on le voit, beaucoup plus simples que celles qui résultent de l'emploi des fonctions circulaires dans le même cas.

Soit, par exemple, comme dans le cas traité par M. Forti,

$$-p = -901,498, \quad q = -13502,84.$$

Voici le tableau du calcul, exécuté au moyen de la Table de M. Gronau :

$\frac{p}{3} = 300,499$		$\mathrm{Ch}\,\frac{u}{3}$	$0,01162$
$\frac{q}{2} = -6526,42$		$2\sqrt{\frac{p}{3}}$	$1,53995$
$\frac{p}{3}$	$2,477844$	x_1	$1,55157$
$\frac{3}{p}$	$\bar{3},522156$	$\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3}$	$\bar{1},36999$
$\sqrt{\frac{3}{p}}$	$\bar{2},761078$	$\sqrt{\frac{p}{3}}$	$1,23892$
$\frac{-q}{2}$	$3,814675$	$\sqrt{3}$	$0,23856$
$\mathrm{Ch}\,u$	$0,097909$	$\sqrt{p}.\mathrm{Sh}\,\frac{u}{3}\,u$ ...	$0,84747$
$\mathrm{M}u = 0,30269$		$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -(1,25054)$	
$\frac{1}{3}\mathrm{M}u = 0,10090$		$\mp (0,84747)\sqrt{-1}$,	

les nombres entre parenthèses étant des valeurs logarithmiques.

2° Soient a le demi-axe équatorial, b le demi-axe polaire d'un sphéroïde aplati, e l'excentricité de l'ellipse méridienne, p le demi-paramètre $= a(1-e^2)$. La surface de la zone comprise entre l'équateur et le parallèle situé à la distance y a pour expression

$$S = \pi b^2 \left[\frac{y}{p} \sqrt{1 + \frac{e^2 y^2}{p^2}} + \frac{1}{e} \log \left(\frac{ey}{p} + \sqrt{1 + \frac{e^2 y^2}{p^2}} \right) \right].$$

Pour calculer cette expression, posons

$$\frac{ey}{p} = \mathrm{Sh}\, u;$$

il viendra

$$S = \frac{\pi b^2}{e} \left(\frac{1}{2} \mathrm{Sh}\, 2u + u \right).$$

S'il s'agit de la surface totale du sphéroïde, on fera

$$\mathrm{Sh}\, u = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}},$$

et l'on doublera l'expression précédente.

Si l'on demande, par exemple, la surface du sphéroïde terrestre, dont l'aplatissement $= \frac{1}{299,153}$, on a

L. e	$\bar{2},91221$
L. $\sqrt{1-e^2}$	$\bar{1},99855$
L. Sh u	$\bar{2},91366$
$\mathrm{M}u = 0,035560$	
$2\mathrm{M}u = 0,071120$	
L. Sh $2u$	$\bar{1},21615$

0,035	0,080590.5
56	1289.4
$u = 0,081880$	
$\frac{1}{2}$ Sh $2u = 0,082247$	
$u + \frac{1}{2}$ Sh $2u = 0,164127$	
Log	$\bar{1},21518$
$\frac{1}{2e}$	0,78676
	0,00194
$1 - e^2$	$\bar{1},99710$
	$\bar{1},99904$

Donc

$$S = 4\pi b^2.(0,00194) = 4\pi a^2.(\bar{1},99904).$$

On a ainsi les rapports de la surface du sphéroïde aux surfaces des deux sphères ayant pour diamètres le diamètre polaire et le diamètre équatorial.

3° Dans le Mémoire de Jacobi sur la rotation des corps (*Journal de Crelle*, t. XXXIX), on trouve, p. 329, la formule

$$\psi' = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + ia)}{\Theta(u - ia)},$$

i étant mis pour $\sqrt{-1}$. Si l'on pose, en adoptant les notations classiques des *Fundamenta nova*,

$$x = \frac{\pi u}{2K}, \quad \alpha = \frac{\pi a}{2K},$$

et que l'on remplace la fonction Θ par son développement connu, la formule en question devient, après la disparition des imaginaires,

$$\operatorname{tang}\psi' = \pm \frac{2q\,\mathrm{Sh}2\alpha \sin 2x - 2q^4\,\mathrm{Sh}4\alpha \sin 4x + \ldots}{1 - 2q\,\mathrm{Ch}2\alpha \cos 2x + 2q^4\,\mathrm{Ch}4\alpha \cos 4x - \ldots}.$$

Soit donné l'angle du module

$$\theta = 29°20'2''$$

avec $L\alpha = \bar{1},89499$. On en conclut $L(M\alpha) = \bar{1},53277$,

$$M\alpha = 0,34102,$$
$$2M\alpha = 0,68204,$$
$$4M\alpha = 1,36408.$$

On a ensuite, au moyen de la petite Table calculée par

Jacobi, ou mieux, au moyen des Tables plus étendues, publiées par M. Meissel (Iserlohn, 1860),

$$L.q = \bar{2},23415.$$

La Table de Gronau donne

$$L.\mathrm{Sh}\,2\alpha = 0,36181,\quad L.\mathrm{Sh}\,4\alpha = 1,062,$$
$$L.\mathrm{Ch}\,2\alpha = 0,39939,\quad L.\mathrm{Ch}\,4\alpha = 1,064.$$

On en conclut

$$\tang\psi' = \pm\frac{(\bar{2},89699)\sin 2x - (\bar{6},300)\sin 4x + \ldots}{1 - (\bar{2},93457)\cos 2x + (\bar{6},302)\cos 4x - \ldots},$$

formule qui fait connaître très-simplement la valeur de l'angle ψ' qui correspond à chaque valeur de la variable x.

Nous nous bornerons à ce petit nombre d'exemples, ne pouvant même indiquer les nombreuses applications des fonctions hyperboliques dans le calcul intégral et dans la Mécanique, où elles jouent un rôle presque aussi important que les fonctions circulaires.