

JOHN GRIFFITHS

Note sur un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 3
(1864), p. 345-349

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__345_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR UN CERCLE;

PAR M. JOHN GRIFFITHS,
Jesus College, Oxford.

Représentons par l, m, n les milieux des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC; par S_a, S_b, S_c et S_l, S_m, S_n les cercles décrits sur ces côtés et sur les médianes Al, Bm, Cn comme diamètres; et enfin, par E l'ellipse

qui touche les côtés en leurs milieux l, m, n : démontrer que le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse E , passe par les points d'intersection des circonférences suivantes :

$$1^{\circ} S_a, S_l, \quad 2^{\circ} S_b, S_m; \quad 3^{\circ} S_c, S_n; \quad 4^{\circ} S, S',$$

où S, S' représentent le cercle circonscrit et le cercle conjugué au triangle (voir *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. II, p. 339).

Si l'on prend le triangle ABC pour triangle de référence, les cercles indiqués ci-dessus seront représentés par les équations :

$$(1) \begin{cases} S_a = x^2 \cos A - \beta\gamma - \gamma x \cos C - \alpha\beta \cos B = 0, \\ S_b = \beta^2 \cos B - \beta\gamma \cos C - \gamma x - \alpha\beta \cos A = 0, \\ S_c = \gamma^2 \cos C - \beta\gamma \cos B - \gamma x \cos A - \alpha\beta = 0, \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} S_l = b\beta^2 \cos B + c\gamma^2 \cos C - a\beta\gamma - (b + c \cos A)\gamma x \\ \qquad \qquad \qquad - (b \cos A + C)\alpha\beta = 0, \\ S_m = \dots\dots\dots = 0, \\ S_n = \dots\dots\dots = 0 \text{ (*)}, \end{cases}$$

et, si l'on désigne par S_d le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse,

$$(3) \begin{cases} E = a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2 - 2bc\beta\gamma - 2ca\gamma\alpha \\ \qquad \qquad \qquad - 2ab\alpha\beta = 0, \end{cases}$$

(*) En coordonnées *trilinéaires*, l'équation générale de la circonférence est

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) + k(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C) = 0;$$

(*Traité des sections coniques* de M. G. Salmon; 4^e éd., p. 119.)

Les coefficients variables sont l, m, n, k ; il suffit de connaître leurs rapports, pour que l'équation soit déterminée. Ces rapports s'obtiennent facilement quand on a les coordonnées de trois points de la courbe. Par exemple on trouve, sans la moindre difficulté, l'équation de la circonfé-

on trouve que

$$(4) \quad \begin{cases} S_d = a\alpha^2 \cos A + b\beta^2 \cos B + c\gamma^2 \cos C \\ - 2(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta) = 0, \end{cases}$$

d'où on déduit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} S_l &= bS_b + cS_c, \\ S_m &= cS_c + aS_a, \\ S_n &= aS_a + bS_b, \\ S_d &= aS_a + bS_b + cS_c, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$aS_a + S_l = S_d = bS_b + S_m = cS_c + S_n.$$

rence S_a décrite sur BC comme diamètre, en remarquant que cette courbe passe par les points H' , H'' , pieds des perpendiculaires abaissées des sommets B, C sur les côtés opposés.

Dans certains cas, on peut déterminer directement l'équation de la circonférence considérée, au moyen de cette proposition que, *si d'un point quelconque d'une circonférence, on mène des perpendiculaires sur les côtés d'un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées sur deux côtés opposés est égal au produit des deux autres perpendiculaires.*

Ainsi, en nommant p la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence S_a sur $H'H''$, on aura $p\alpha = \epsilon\gamma$. Mais l'équation de la droite $H'H''$ est

$$\alpha \cos A - \gamma \cos C - \epsilon \cos B = 0;$$

et, d'après la formule qui donne la distance d'un point à une droite, la valeur de p est

$$\alpha \cos A - \gamma \cos C - \epsilon \cos B;$$

donc la circonférence S_a a pour équation

$$(\alpha \cos A - \gamma \cos C - \epsilon \cos B)\alpha = \epsilon\gamma$$

ou

$$\alpha^2 \cos A - \epsilon\gamma - \alpha\gamma \cos C - \alpha\epsilon \cos B = 0.$$

Quant à l'équation de S_a , lieu géométrique du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse E qui touche en leurs milieux les trois côtés du triangle ABC, elle peut être déduite de l'équation qui représente, en coordonnées trilinéaires, le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une conique quelconque (p. 338 de l'ouvrage déjà cité). G.

La circonférence S_d passe donc par les six points d'intersection des circonférences $S_a, S_l; S_b, S_m; S_c, S_n$. Il est évident aussi, d'après l'équation (4), que S_d passe par les deux points communs aux circonférences S, S' . Le théorème est ainsi démontré.

Les axes radicaux des cercles $S_a, S_l; S_b, S_m$ et S_c, S_n , ont pour équations :

$$(5) \quad -2\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = 0,$$

$$(6) \quad \alpha \cos A - 2\beta \cos B + \gamma \cos C = 0,$$

$$(7) \quad \alpha \cos A + \beta \cos B - 2\gamma \cos C = 0.$$

Il suit de là que ces lignes passent toutes trois par le point de concours des hauteurs du triangle.

D'ailleurs, on a, d'après les relations ci-dessus,

$$2S_d = S_l + S_m + S_n,$$

d'où l'on déduit que les quatre points d'intersection des deux couples de circonférences $S_d, S_l; S_m, S_n$ sont situés sur la circonférence $S_m + S_n$, et que les intersections de $S_d, S_m; S_n, S_l; S_d, S_n; S_l, S_m$ sont situées sur les circonférences $S_n + S_l$ et $S_l + S_m$ respectivement.

Les cordes communes aux cercles $S, S_l; S, S_m; S, S_n$ sont données par les équations

$$(8) \quad \beta \cos B + \gamma \cos C = 0,$$

$$(9) \quad \gamma \cos C + \alpha \cos A = 0,$$

$$(10) \quad \alpha \cos A + \beta \cos B = 0.$$

Donc, les lignes (5), (8); (6), (9); (7), (10) coupent les côtés BC, CA, AB respectivement, en trois points qui sont situés sur la ligne

$$\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = 0,$$

c'est-à-dire sur l'axe radical des cercles S, S' .

Les axes radicaux des cercles $S_m, S_n; S_n, S_l;$ et S_l, S_m ont pour équations :

$$\begin{aligned}\beta \cos B - \gamma \cos C &= 0, \\ \gamma \cos C - \alpha \cos A &= 0, \\ \alpha \cos A - \beta \cos B &= 0,\end{aligned}$$

qui représentent les hauteurs du triangle de référence.

Ces hauteurs sont, évidemment, les cordes communes des cercles

$$S_b, S_c; S_c, S_a; S_a, S_b.$$

Le cercle S_d , lieu dont il s'agit, est concentrique, comme on le sait, à l'ellipse E. Son centre coïncide donc avec le point de rencontre des médianes du triangle.

La valeur que je trouve pour son rayon est

$$\frac{2}{3} R \sqrt{1 + \cos A \cos B \cos C},$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC (*).

(*) En nommant a' le demi-diamètre de l'ellipse E, parallèle à la tangente a , et b' le demi-diamètre conjugué conduit au milieu L de BC, on a

$$a'^2 = \frac{a^2}{12} \quad \text{et} \quad b'^2 = \frac{b^2 + c^2}{18} - \frac{a^2}{36},$$

d'où

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{18} = \frac{2R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{9}.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned}a'^2 + b'^2 &= \frac{4R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)}{9}, \\ \sqrt{a'^2 + b'^2} &= \frac{2R}{3} \sqrt{1 + \cos A \cos B \cos C},\end{aligned}$$

ce qui est la valeur du rayon du cercle S_d .

G.