Nouvelles annales de mathématiques

H. Lemonnier

Calcul approché de r dans la formule des intérêts composés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 337-345
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__337_0>

CALCUL APPROCHÉ DE r DANS LA FORMULE DES INTÉRÊTS COMPOSÉS;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur au lycée Saint-Louis.

Soit la formule

$$A = a(1+r)^n(1+rf),$$

où n est un nombre entier et f un facteur moindre que 1.

Si on prend

$$\begin{aligned}
A &= a(1+r_1)^n,\\
A &= a(1+r_2)^n(1+r_1 f),\\
A &= a(1+r_3)^n(1+r_2 f),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A &= a(1+r_k)^n(1+r_{k-1} f),\\
A &= a(1+r_{k+1})^n(1+r_k f),
\end{aligned}$$

on reconnaît immédiatement que $r_1, r_3, r_5, \ldots$, forment une suite décroissante, tandis que $r_2, r_4, r_6, \ldots$, forment une suite croissante.

Nous nous proposons d'établir que r en est la limite commune, et de fixer le degré d'approximation à quelque point qu'on s'arrête.

Nous avons d'abord

$$(1+r_k)^n(1+r_{k-1}f) = (1+r_{k+1})^n(1+r_k f),$$

d'où

$$\frac{(1+r_k)^n}{(1+r_{k+1})^n} = \frac{1+r_k f}{1+r_{k-1}f},$$

ce qui donne

$$\frac{(1+r_k)^n - (1+r_{k+1})^n}{(1+r_{k+1})^n} = \frac{(r_k - r_{k-1})f}{1+r_{k-1}f},$$

puis

$$\frac{n(r_k - r_{k+1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(r_k^2 - r_{k+1}^2) + \ldots}{(1+r_{k+1})^n} = \frac{(r_k - r_{k-1})f}{1 + r_{k-1}f},$$

d'où

$$r_k - r_{k+1} = \frac{(r_k - r_{k-1})}{1 + r_{k-1}f}$$

$$\times \frac{(1+r_{k+1})^n f}{n + \frac{n(n-1)}{1.2}(r_k + r_{k+1}) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r_k^2 + r_k r_{k+1} + r_{k+1}^2) + \ldots}$$

$$= (r_k - r_{k-1})\frac{f}{1 + r_{k-1}f}\left[\frac{1}{n + \frac{n(n-1)}{1.2}(r_k + r_{k+1}) + \ldots}\right.$$

$$\left. + r_{k+1}\frac{n + \frac{n(n-1}{1.2}r_{k+1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}r_{k+1}^2 + \ldots}{n + \frac{n(n-1)}{1.2}(r_k + r_{k+1}) + \ldots}\right].$$

Dans la parenthèse, le facteur de r_{k+1} est moindre que 1. Donc

$$\pm(r_k - r_{k+1}) < \pm(r_k - r_{k-1})\frac{f}{1 + r_{k-1}f}\left(\frac{1}{n} + r_{k+1}\right).$$

Posons

$$\alpha = \frac{f}{1 + r_2 f}\left(\frac{1}{n} + r_1\right).$$

Comme nous avons $r_1 > r_m$ et $r_2 < r_m$, il s'ensuit

$$\alpha > \frac{f}{1 + r_{k-1}f}\left(\frac{1}{n} + r_{k+1}\right);$$

donc

$$\pm(r_k - r_{k+1}) < \pm(r_k - r_{k-1})\alpha,$$

relation générale qui donne

$$r_3 - r_2 < (r_1 - r_2)\alpha,$$
$$r_3 - r_4 < (r_3 - r_2)\alpha < (r_1 - r_2)\alpha^2,$$
$$r_5 - r_4 < (r_3 - r_4)\alpha < (r_1 - r_2)\alpha^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm(r_k - r_{k+1}) < \pm(r_k - r_{k-1})\alpha < (r_1 - r_2)\alpha^{k-1};$$

mais

$$(1+r_1)^n = (1+r_2)^n(1+r_1 f),$$

d'où

$$\frac{(1+r_1)^n}{(1+r_2)^n} = 1 + r_1 f,$$
$$\frac{(1+r_1)^n - (1+r_2)^n}{(1+r_2)^n} = r_1 f;$$

donc

$$\frac{n(r_1 - r_2) + \frac{n(n-1)}{1.2}(r_1^2 - r_2^2) + \ldots}{(1+r_2)^n} = r_1 f;$$

d'où

$$r_1 - r_2 = \frac{(1+r_2)^n r_1 f}{n + \frac{n(n-1)}{1.2}(r_1+r_2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + \ldots}$$

$$= r_1 f \left[\frac{1}{n + \ldots} + r_2 \frac{n + \frac{n(n-1)}{1.2} r_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} r_2^2 + \ldots}{n + \frac{n(n-1)}{1.2}(r_1+r_2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + \ldots} \right]$$

$$< r_1 f\left(\frac{1}{n} + r_2\right) < r_1 f\left(\frac{1}{n} + r_1\right).$$

En conséquence,

$$\pm(r_k - r_{k+1}) < r_1 f\left(\frac{1}{n} + r_1\right)\alpha^{k-1},$$

ou

$$\pm(r_k - r_{k+1}) < r_1 f\left(\frac{f}{1 + r_2 f}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{n} + r_1\right)^k.$$

Telle est la formule que nous avions en vue. Elle établit que r est la limite commune des deux suites

$$r_1, r_3, r_5, \ldots,$$

$$r_2, r_4, r_6, \ldots,$$

si l'on a, comme d'ordinaire,

$$\frac{1}{n} + r_1 < 1,$$

ou même à la seule condition d'avoir

$$\frac{f}{1 + r_2 f}\left(\frac{1}{n} + r_1\right) < 1,$$

et elle fixera le degré d'approximation au point où on voudra s'arrêter.

Note du rédacteur. — Un calcul de valeurs approchées, qui ne tient aucun compte du degré de l'approximation obtenue, est un véritable non-sens ; autant vaudrait-il prendre le premier nombre venu comme valeur approchée de celle que l'on cherche. Je considère donc l'article de M. Lemonnier comme un complément indispensable à la solution que l'on donne ordinairement de l'une des questions sur les intérêts composés.

Toute méthode d'approximation doit satisfaire à deux conditions essentielles ; il faut d'abord qu'elle fasse connaître le degré de l'approximation de chacune des valeurs qu'elle détermine, et, en second lieu, il faut qu'elle puisse conduire à une valeur aussi approchée de l'inconnue qu'on voudra.

Ces conditions sont-elles, ou non, remplies par la méthode qui donne les valeurs approchées r_1, r_2, r_3, etc., de l'inconnue r dans l'équation

$$A = a(1+r)^n(1+rf)?$$

Il résulte des calculs de M. Lemonnier que la méthode est applicable, si les données A, a, n, f satisfont elles-mêmes à l'inégalité

$$\frac{f}{1+r_2 f}\left(\frac{1}{n}+r_1\right) < 1,$$

où r_1, r_2 représentent les racines positives des équations

$$A = a(1+r_1)^n, \quad A = a(1+r_2)^n(1+r_1 f).$$

En indiquant ici quelques modifications qu'on peut apporter dans ces calculs, mon objet n'est pas de parvenir à des résultats qui soient préférables à ceux auxquels ils ont conduit, mais seulement d'éviter l'emploi de la formule du binôme, dont la connaissance n'est pas exigée des candidats aux Écoles Navale et Militaire.

J'admettrai que le nombre entier n surpasse l'unité, car, s'il en était autrement, la valeur de r se déterminerait en résolvant une équation du second degré. On a, de plus, par hypothèse, $f < 1$.

Les nombres $r_1, r_3, r_5, \ldots$, sont plus grands que r, et vont en diminuant; les nombres $r_2, r_4, r_6, \ldots$, sont moindres que r, et vont en augmentant; donc, les uns et les autres s'approchent de plus en plus de r. S'en rapprocheront-ils autant qu'on voudra? C'est le point à éclaircir.

Je désigne par r_{k-1}, r_k, r_{k+1}, trois des valeurs approchées successives, et je suppose que le nombre k est pair.

Les relations

$$A = a(1+r_k)^n(1+f r_{k-1}),$$
$$A = a(1+r_{k+1})^n(1+f r_k),$$

donnent

$$(1 + r_{k+1})^n (1 + f r_k) = (1 + r_k)^n (1 + f r_{k-1}),$$

ou

$$(1 + r_{k+1})^n + (1 + r_{k+1})^n f r_k = (1 + r_k)^n + (1 + r_k)^n f r_{k-1}.$$

De là

$$(1 + r_{k+1})^n - (1 + r_k)^n = (1 + r_k)^n f r_{k-1} - (1 + r_{k+1})^n f r_k,$$

égalité qui revient à

$$\begin{aligned}&(1 + r_{k+1})^n - (1 + r_k)^n \\ &= (1 + r_k)^n f (r_{k-1} - r_k) - f r_k [(1 + r_{k+1})^n - (1 + r_k)^n],\end{aligned}$$

et par suite on a

$$[(1 + r_{k+1})^n - (1 + r_k)^n](1 + f r_k) = (1 + r_k)^n f (r_{k-1} - r_k);$$

ou bien encore

$$\begin{aligned}&(r_{k+1} - r_k)[(1 + r_{k+1})^{n-1} + (1 + r_{k+1})^{n-2}(1 + r_k) + \ldots \\ &+ (1 + r_k)^{n-1}](1 + f r_k) = (1 + r_k)^n f (r_{k-1} - r_k).\end{aligned}$$

Le nombre r_{k+1} étant plus grand que r_k, le facteur

$$[(1 + r_{k+1})^{n-1} + (1 + r_{k+1})^{n-2}(1 + r_k) + \ldots + (1 + r_k)^{n-1}]$$

est de même plus grand que $n(1 + r_k)^{n-1}$. Par conséquent, de la dernière égalité obtenue on déduit successivement les inégalités :

$$n(r_{k+1} - r_k) \cdot (1 + r_k)^{n-1}(1 + f r_k) < (1 + r_k)^n f \cdot (r_{k-1} - r_k);$$

$$(r_{k+1} - r_k) < \frac{(1 + r_k) f}{1 + f r_k} \cdot \frac{(r_{k-1} - r_k)}{n};$$

$$(r_{k+1} - r_k) < \frac{r_{k-1} - r_k}{n}.$$

On a donc, en substituant à k les nombres 2, 4, etc.,

$$r_3 - r_2 < \frac{r_1 - r_2}{n},$$

$$r_5 - r_4 < \frac{r_3 - r_4}{n} < \frac{r_3 - r_2}{n},$$

d'où

$$r_5 - r_4 < \frac{r_1 - r_2}{n^2}.$$

De même,

$$r_7 - r_6 < \frac{r_5 - r_6}{n} < \frac{r_5 - r_4}{n}:$$

à plus forte raison

$$r_7 - r_6 < \frac{r_1 - r_2}{n^3};$$

et, généralement,

$$r_{2k+1} - r_{2k} < \frac{r_1 - r_2}{n^k},$$

inégalité qui prouve que la différence $r_{2k+1} - r_{2k}$ deviendra moindre que tout nombre donné.

Il est clair qu'on a

$$r_{2k+1} - r < r_{2k+1} - r_{2k} < \frac{r_1 - r_2}{n^k}$$

et

$$r - r_{2k} < r_{2k+1} - r_{2k} < \frac{r_1 - r_2}{n^n}.$$

c'est-à-dire que la méthode conduit à des valeurs aussi approchées qu'on voudra de la valeur exacte de l'inconnue r.

On peut exprimer la limite des erreurs $r_{2k+1} - r$, $r - r_{2k}$, en fonction des données A, a, n, f, et du nombre k qui détermine le rang de la valeur approchée; car les égalités

$$\mathrm{A} = a(1 + r_1)^n, \quad \mathrm{A} = a(1 + r_2)^n(1 + fr_1)$$

donnent

$$(1 + r_1)^n - (1 + r_2)^n = (1 + r_2)^n fr_1,$$

ou

$$(r_1 - r_2)\left[(1 + r_1)^{n-1} + (1 + r_1)^{n-2}(1 + r_2) + \ldots + (1 + r_2)^{n-1}\right] = (1 + r_2)^n fr_1,$$

et, comme on a

$$\left[(1 + r_1)^{n-1} + (1 + r_1)^{n-2}(1 + r_2) + \ldots + (1 + r_2)^{n-1}\right] > n(1 + r_2)^{n-1},$$

il en résulte

$$r_1 - r_2 < \frac{(1+r_2)fr_1}{n} < \frac{(1+r_1)fr_1}{n},$$

Mais

$$(1+r_1) = \sqrt[n]{\frac{A}{a}},$$

et

$$r_1 = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1;$$

substituant à $1+r_1$, r_1, leurs valeurs, l'inégalité

$$r_1 - r_2 < \frac{(1+r_1)fr_1}{n}$$

devient

$$r_1 - r_2 < \frac{f\sqrt[n]{\frac{A}{a}}\left(\sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1\right)}{n}.$$

D'où

$$r_{2k+1} - r < \frac{f\sqrt[n]{\frac{A}{a}}\left(\sqrt[n]{\frac{A}{a}} + 1\right)}{n^{k+1}},$$

$$r - r_{2k} < \frac{f\sqrt[n]{\frac{A}{a}}\left(\sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1\right)}{n^{k+1}}.$$

En terminant, remarquons qu'il n'est pas démontré qu'une valeur r_k donnée par cette méthode approche plus de l'inconnue r que la valeur précédente r_{k-1}.

Lorsque le nombre k est pair, on trouve, au moyen d'un calcul absolument semblable à celui que nous avons fait,

$$r - r_k < \frac{r_{k-1} - r}{n},$$

et, par conséquent, la valeur r_k de rang pair est plus approchée que la précédente r_{k-1}. Mais si k est impair, le même calcul conduit à l'égalité

$$(r_k - r)[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2}(1+r_k) + \ldots + (1+r_k)^{n-1}](1+fr_{k-1})$$
$$= (1+r)^n f(r - r_{k-1}),$$

qui ne prouve pas que $(r_k - r)$ soit moindre que $(r - r_{k-1})$. Cette égalité montre qu'on a

$$n(r_k - r)(1+r)^{n-1}(1+fr_{k-1}) < (1+r)^n f(r - r_{k-1});$$

d'où

$$r_k - r < (r - r_{k-1}) \frac{(1+r)f}{n(1+fr_{k-1})},$$

et *à fortiori*

$$r_k - r < (r - r_{k-1}) \frac{(1+r_1)f}{n(1+fr_2)}.$$

Par conséquent, il suffit qu'on ait

$$\frac{(1+r_1)f}{n(1+fr_2)} < 1,$$

pour que la valeur r_k, de rang impair, soit plus approchée de r que celle qui la précède. Cette condition sera évidemment remplie si r_1 est moindre que l'unité.

G.