HAAG

Solution géométrique de la question donnée en composition au concours d'admission à l'École normale (1863)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 316-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__316_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

De la question donnée en composition au concours d'admission à l'École Normale (1863);

PAR M. HAAG.

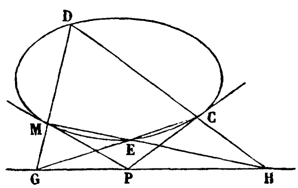
On considère les hyperboles équilatères tangentes à une droite fixe donnée AB *en un point* C *et passant par un point* D. *D'un point* P *pris sur* AB *on mène des tangentes à chacune de ces hyperboles et on demande le lieu des points de contact.*

Déterminer la nature du lieu d'après la position du point D.

THÉORÈME PRÉLIMINAIRE. — *Si une conique variable passe par deux points fixes* D, E *et touche une droite fixe* PC *en un point* C, *le lieu des points de contact des tangentes à cette conique menées par un point* P *de la droite* PC *est une conique.*

En effet, soit M un point du lieu : considérons le qua-

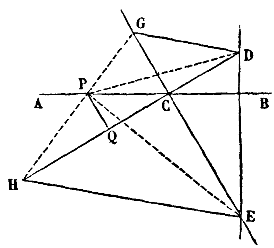
FIG. 1.



drilatère MDCE ; ce quadrilatère étant inscrit dans une conique à laquelle CP, MP sont tangentes, d'après un théorème connu, le point P sera situé sur la droite qui joint les points d'intersection G, H des côtés opposés, et l'on pourra considérer le point M comme obtenu en menant par P une sécante arbitraire GH, joignant DG, EH et prenant le point d'intersection de ces deux dernières droites. Or les droites DG, EH décrivent évidemment des divisions homographiques, donc le point M décrit une conique passant aux points D, E. De plus, si la sécante GH coïncide avec PC, on aura le point C, qui est un troisième point du lieu ; enfin, si la sécante se rapproche de la position PD, le point M tend vers le point D, et comme à la limite la sécante DM et la droite PD coïncident, on en conclut que PD est au point D la tangente à la conique trouvée. Pour une raison analogue, PE sera la tangente au point E de cette conique.

Revenons à la question proposée. On sait que dans l'hyperbole équilatère les cordes perpendiculaires à une tangente sont vues du point de contact sous un angle droit. Donc si nous élevons au point C la perpendiculaire à CD

Fig. 2.



et que nous prenions son intersection avec la perpendiculaire à AB menée par D, le point E ainsi obtenu sera commun à toutes les hyperboles équilatères considérées. Donc, d'après le théorème précédent, le lieu demandé est une conique passant par les points C, D, E et ayant en D, E les droites PD, PE pour tangentes.

Cherchons à déterminer d'après la position du point D la nature de la conique trouvée. Cette discussion se fera aisément en cherchant les points de la courbe situés à l'infini.

Soit GH une position de la sécante mobile pour laquelle DG, EH sont parallèles. On aura alors

$$CG.CH = CD.CE,$$

c'est-à-dire que les triangles CDE, CGH seront équivalents. GH sera donc une tangente menée du point P à l'hyperbole équilatère asymptote à DH, EG et touchant DE; et le nombre des points à l'infini sur la conique que nous étudions dépendra de la position du point P par rapport à cette hyperbole.

Du point P abaissons PQ perpendiculaire sur DH, et désignons par θ l'angle PCQ.

1° Si PQ.CQ, c'est-à-dire $\overline{PC}^2 \sin\theta\cos\theta$, est plus petit que $\dfrac{CD.CE}{4}$ ou $\dfrac{CD^2}{4\tang\theta}$, le point P est extérieur à l'hyperbole; on a deux positions de GH qui donnent deux points à l'infini, la courbe est donc une hyperbole.

Dans ce cas on a

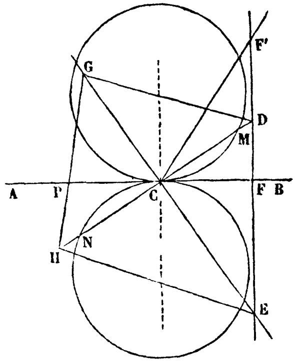
$$CD^2 > 4\overline{PC}^2 \sin^2\theta.$$

Décrivons deux cercles avec le rayon PC et tangents à AB au point C de part et d'autre de cette droite. Ces cercles intercepteront sur DH des cordes CM, CN égales à $2 PC \sin\theta$. Comme CD est plus grand en valeur absolue que $2 PC \sin\theta$, le point D sera en dehors de ces cercles.

2° Je suppose que $\overline{PC}^2 \sin\theta\cos\theta = \dfrac{CD^2}{4\tang\theta}$: le point P est alors sur l'hyperbole équilatère. La conique a un point à l'infini, elle est du genre parabole, le point D est sur l'un des deux cercles.

3° Je suppose enfin $PC^2 \sin\theta \cos\theta > \frac{CD^2}{4 \tang\theta}$: le point P est dans ce cas interieur à l'hyperbole équilatère, il n'y a

FIG. 3.



plus de points à l'infini sur la conique étudiée, qui est alors une ellipse, et le point D est intérieur à l'un des deux cercles.

Pour achever cette discussion, remarquons :

Que la *conique* est *toujours réelle*, puisqu'elle passe par trois points réels et qu'elle a des tangentes réelles en deux de ces points ;

Qu'elle ne peut jamais être un cercle, puisque le cercle circonscrit au triangle CDE a en D et en E des tangentes horizontales.

Pour qu'elle se réduise à un système de deux droites, il faut évidemment :

Ou bien que le lieu se compose des deux tangentes PD, PE, et alors le point P doit être en C ;

Ou bien que ces deux tangentes soient dans le prolongement l'une de l'autre, et alors le point P doit être à l'intersection de DE et de AB en F.

Dans le premier cas, on a les droites rectangulaires

CD, CE, qui font partie de la série des hyperboles équilatères considérées.

Dans le second cas, on a la droite DE et une seconde droite CF′ conjuguée de CF par rapport à l'angle DCE. On s'explique facilement l'introduction de cette droite qui, passant au point C et au point F′ conjugué de F par rapport à DE, est la polaire du point F par rapport à toutes les hyperboles équilatères que l'on considère.

Quant à la droite DE, elle provient du système des droites rectangulaires DE, AB qui peut être considéré comme une hyperbole équilatère remplissant les conditions du problème.