A. PICART

Note sur le lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 292-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__292_1>

NOTE
Sur le lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante;

Par M. A. PICART,
Professeur au lycée Charlemagne.

I. *Normale à la surface.*

Désignons par a la somme constante des distances d'un point de la surface aux deux droites fixes. On reconnaît aisément que la somme des distances à ces droites d'un point extérieur à la surface est plus grande que *a*. Le point de contact d'un plan tangent est dont le point de ce plan dont la somme des distances aux deux droites est minimum.

Dès lors se présente la question suivante :

Quel est sur un plan le point dont la somme des distances à deux droites fixes est minimum?

Nous supposerons que le plan ne rencontre pas la plus courte distance des droites entre les deux pieds de cette plus courte distance, sans quoi le point cherché serait évidemment le point d'intersection.

Soient X et Y les deux droites et P le plan. Que l'on prenne la droite Y′ symétrique de Y par rapport à P, la somme des distances d'un point quelconque du plan aux deux droites X, Y′ est la même que la somme des distances de ce même point aux deux droites X, Y. Or le point du plan dont la somme des distances aux deux droites X, Y′ est minimum, est évidemment le point où la plus courte distance de ces deux droites rencontre le plan (*). De là on déduit facilement que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux droites fixes X, Y sont dans un plan perpendiculaire au plan P, et sont également inclinées sur ce plan. Donc :

Théorème I. — *La normale menée à la surface par un point de cette surface est la bissectrice de l'angle que forment les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux droites.*

On peut, du reste, reconnaître *à posteriori* que si M est un point de la surface, le point M′, infiniment voisin

(*) J'indique ici la solution générale du problème; je ne m'arrête pas aux cas particuliers.

de M, situé dans le plan des deux perpendiculaires MA, MB, sur la droite qui fait avec MA et MB, de part et d'autre, des angles égaux, appartient aussi à la surface; car, λ désignant l'angle $M'MA$, on a

$$M'A' = MA - MM'\cos\lambda,$$
$$M'B' = MB + MM'\cos\lambda,$$

par suite,

$$M'A' + M'B' = MA + MB.$$

De même, le point M'', infiniment voisin de M, situé sur la perpendiculaire au plan MAB, appartient aussi à la surface, puisque ses distances aux deux droites fixes sont égales, respectivement, aux distances du point M à ces deux droites. La normale en M, devant être perpendiculaire aux deux droites MM', MM'', est donc bien la bissectrice de l'angle AMB.

Si, sur la normale à la surface, on prend un point M''', infiniment voisin de M, la différence des distances de ce point M''' aux deux droites fixes est égale à la différence des distances du point M à ces deux droites. D'ailleurs, la différence des distances du point M'' aux deux droites est aussi égale à la différence des distances du point M; donc :

Théorème II. — *La normale, en un point* M, *au lieu des points dont la différence des distances* MA, MB *à deux droites fixes est constante, est la bissectrice de l'angle formé par l'une de ces perpendiculaires et le prolongement de l'autre.*

Corollaire. — *Le lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante, et le lieu des points dont la différence des distances à ces deux mêmes droites est aussi constante, se coupent orthogonalement.*

II. *Lignes de courbure de la surface.*

Nous ne considérerons dans cette première Note que le cas où les deux droites sont rectangulaires et situées dans le même plan, nous réservant de traiter dans une autre le cas général.

La normale en M est bissectrice de l'angle des deux perpendiculaires MA, MB, abaissées sur les deux droites fixes OX, OY; elle rencontre AB en un point I tel que $\frac{AI}{BI} = \frac{AM}{BM}$. Prenons le point M′ de la surface, infiniment voisin de M dans le plan normal AMB : il se projette sur les deux droites en A′ et B′; et si l'on désigne par λ l'angle que forme MM′ avec MA, par φ et ψ les angles que forme le plan MAB avec les plans perpendiculaires aux droites OX, OY, menés par le point M, on a

$$AA' = MM' \sin\lambda \sin\varphi,$$
$$BB' = MM' \sin\lambda \sin\psi.$$

Soit H le point où la droite A′B′ rencontre AB; si du point H comme centre on décrit, entre AB et A′B′, deux arcs de cercle AP et BQ, on aura

$$AP = AA' \sin A = MM' \sin\lambda \sin\varphi \sin A,$$
$$BQ = BB' \sin B = MM' \sin\lambda \sin\psi \sin B;$$

par suite,

$$\frac{HA}{HB} = \frac{\sin\varphi \sin A}{\sin\psi \sin B}.$$

Soit K la projection du point M sur le plan XOY : on a

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{BK}{MB} : \frac{AK}{MA} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{\cos A}{\cos B},$$

d'où

$$\frac{HA}{HB} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{\sin A \cos A}{\sin B \cos B},$$

ou, les angles A et B étant complémentaires,

$$\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}.$$

Le point d'intersection des deux droites infiniment voisines AB, A′B′, est donc le point I. Dès lors la normale en M′ qui coupe A′B′ en un point infiniment voisin de I forme avec le plan normal IMM′ un angle infiniment petit du second ordre; MM′ est donc l'élément d'une ligne de courbure de la surface. Par conséquent, en chaque point de la surface, l'une des lignes de courbure est dirigée dans le plan normal que déterminent les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux droites fixes.

De là et du théorème II on déduit :

Théorème III. — *Les lignes de courbure d'un système du lieu des points dont la somme des distances à deux droites rectangulaires et situées dans un même plan est constante, sont les intersections de cette surface avec toutes les surfaces lieux des points dont la différence des distances aux deux mêmes droites est une quantité constante quelconque.*

Si l'on désigne par r et t les distances d'un point aux deux droites OX, OY, les deux familles de surfaces définies par les équations

$$r + t = a,$$
$$r - t = b,$$

appartiennent donc à un système triple orthogonal.

Quelle est la troisième famille de ce système?

On sait que dans le paraboloïde à plans directeurs perpendiculaires il existe une génératrice de chaque système qui coupe orthogonalement toutes les génératrices de l'autre système. Nous appellerons ces deux génératrices les *génératrices principales* de la surface.

Ces génératrices principales, perpendiculaires entre elles, définissent une famille de paraboloïdes à plans directeurs rectangulaires.

Considérons l'un des paraboloïdes ayant pour génératrices principales les deux droites fixes OX, OY; et soit M un point commun à ce paraboloïde et à la surface ($r + t = a$); le plan des génératrices MA, MB est le plan tangent à ce paraboloïde : MM′ est donc un élément de la courbe d'intersection des deux surfaces.

De là résulte le théorème suivant :

Théorème IV. — *Les lignes de courbure du second système de la surface $r + t = a$ sont les intersections de cette surface avec la famille de paraboloïdes ayant pour génératrices principales les deux droites fixes.*

Ces paraboloïdes constituent, avec les familles de surfaces définies par les équations

$$r + t = a, \quad r - t = b,$$

un système triple orthogonal.

Ce système a été obtenu par M. A. Serret (*Journal de Liouville*, t. XII). Mais il n'était peut-être pas sans intérêt d'y parvenir par une voie purement synthétique.