Nouvelles annales de mathématiques

Aelt

Note sur les homogènes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 289-292
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__289_0>

NOTE SUR LES HOMOGÈNES;

PAR AELT.

M. Terquem, d'excellente mémoire, a souvent préconisé dans ce journal l'emploi des équations homogènes en Géométrie analytique. Mais il faut convenir que pour rendre facile aux étudiants l'intelligence et la pratique de cette théorie d'ailleurs si utile, il était indispensable d'en expliquer la signification géométrique. C'est ce que M. Painvin vient de faire en montrant (ci-dessus, p. 145) que par la substitution de $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ à x et y, dans une équation à deux variables, on obtient l'équation d'une projection centrale (*d'une perspective*) de la figure que représentait la première équation. Je crois pouvoir ajouter ici quelques éclaircissements qui à la vérité n'étaient pas nécessaires pour l'objet que M. Painvin avait immédiatement en vue.

Premièrement, puisque $z = 0$ doit être l'équation d'une droite, cette lettre z doit représenter une fonction linéaire des deux autres variables. De plus, pour ne pas blesser le principe même *de l'homogénéité*, les termes de cette fonction doivent être de degré nul.

La transformation dont il s'agit revient donc à remplacer

$$x \quad \text{par} \quad \frac{x'}{ax' + by' + 1},$$

$$y \quad \text{par} \quad \frac{y'}{ax' + by' + 1},$$

sauf à effacer les accents et à écrire pour dénominateur la lettre z.

Et dès lors on voit bien ce que c'est que faire $z=1$; c'est annuler les coefficients des variables dans la fonction $ax'+by'+1$; c'est donc rendre infinis les segments que la droite $ax'+by'+1=0$ fait sur les nouveaux axes. Et puisqu'on reproduit alors la première équation, c'est que l'équation transformée représente une figure où une droite à une distance finie correspond à une droite qui dans la figure primitive est tout entière à l'infini.

Mais pour plus de précision, je vais montrer que quel que soit l'angle θ des axes des x et y avec lesquels a été construite la figure représentée par la première équation, et quel que soit aussi l'angle θ' des nouveaux axes avec lesquels aura été construite la figure de l'équation en x' et y', ces figures peuvent être placées de sorte que l'une d'elles soit la projection centrale (ou *perspective*) de l'autre.

Je remarque d'abord qu'en vertu des relations

$$x=\frac{x'}{ax'+by'+1},\quad y=\frac{y'}{ax'+by'+1},$$

ou de leurs équivalentes

$$x'=-\frac{x}{ax+by-1},\quad y'=-\frac{y}{ax+by-1},$$

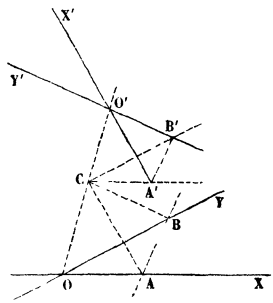
les axes des x et des x' doivent se correspondre, comme aussi ceux des axes des y et des y'. De sorte que, si O et O′ sont les deux origines, le centre C de la projection centrale est nécessairement sur la droite OO′.

En second lieu, un point quelconque de la droite

$$ax+by-1=0$$

de la première figure passant à l'infini sur la seconde, si on appelle A et B les points où elle rencontre les axes des x et des y, de sorte que $OA = \frac{1}{a}$, et $OB = \frac{1}{b}$, le plan CAB est nécessairement parallèle au plan de la seconde figure. De plus, à cause de la correspondance des axes OX et OY avec les axes $O'X'$ et $O'Y'$ respectivement, l'angle $\widehat{ACB}$ est égal à l'angle θ' de ces deux derniers axes.

Donc, si on construit sur AB un segment capable de



l'angle θ' et qu'on fasse tourner ce segment autour de AB, le point C, centre de la perspective, est quelque part sur cette surface. D'ailleurs, un plan $A'CB'$ mené par le point C parallèlement au plan des xy doit couper le plan des $X'Y'$ selon une droite $A'B'$ dont les points se projetteront à l'infini sur le premier des deux, c'est-à-dire selon la droite dont l'équation est

$$ax' + by' + 1 = 0.$$

Menant donc le plan $A'O'B'$ parallèle au plan ACB, on doit avoir

$$O'A' = -\frac{1}{a}, \quad B'O' = -\frac{1}{b},$$

c'est-à-dire que

$$A'O' = AO \quad \text{et} \quad B'O' = BO.$$

Et comme les triangles ACB, A′O′B′, sont semblables, on a manifestement

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}.$$

Imaginons donc qu'après avoir décrit sur AB le segment capable de l'angle θ', on construise dans le même plan (soit dans le plan des xy) la circonférence qui est le lieu des points dont les distance aux extrémités de AB sont dans le rapport $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$; enfin, soit D le point de rencontre de ce segment et de cette circonférence. Si on fait tourner la figure autour de AB, le point D décrira un cercle qui sera le lieu des points C.

La détermination du plan A′O′B′ relative à une situation particulière de ce point C est facile, puisque le triangle A′CB′ est semblable à AOB et que le côté A′B′ est connu comme troisième côté du triangle A′O′B′ dont on connaît l'angle en O′ avec les deux côtés qui le comprennent.

Nota. — On propose de donner la signification géométrique de la transformation homogène dans le cas d'une équation entre les trois coordonnées de l'espace x, y et z.