Remarques sur les compositions de trigonométrie et de mathématiques faites en 1863 pour l'admission à l'École polytechnique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 277-284

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__277_0>

REMARQUES
Sur les compositions de Trigonométrie et de Mathématiques faites en 1863 pour l'admission à l'École Polytechnique.

Composition de Trigonométrie.

On a indiqué, l'année dernière (*voir* le numéro de juin 1863, p. 281), les fautes qui se rencontrent le plus fréquemment dans la composition de Trigonométrie. Il serait inutile d'en reproduire le tableau, qui est à peu près le même tous les ans. La plupart sont des fautes d'inattention et tiennent au manque d'habitude. Un élève qui a résolu une dizaine de triangles n'est pas exposé à prendre un sinus dans la colonne des tangentes, ou à commettre d'autres bévues de ce genre. Quant aux formules fausses, outre qu'il est bien facile de les éviter en consultant l'instruction qui accompagne les tables, un peu d'attention suffit souvent pour s'apercevoir de leur inexactitude. Par exemple, il est visible que la formule

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

est fausse, puisqu'elle donnerait $c = 0$, pour $a = b$, quel que soit C. On est également inexcusable lorsqu'on écrit des résultats dont l'absurdité est évidente. Le meilleur calculateur peut se tromper, mais il n'inscrira jamais des valeurs comme les suivantes :

$$A = 35^\circ, \quad B = 48^\circ, \quad C = 34^\circ,$$

ou

$$a = 2245, \quad b = 598, \quad c = 46.$$

Il verrait bien, dans le premier cas, que la somme des angles est moindre que 180 degrés, et dans le second, que le côté *a* est supérieur à la somme des deux autres; mais certains candidats calculent pour ainsi dire les yeux fermés, et on en a vu trouver pour les angles des valeurs négatives, sans manifester le moindre doute au sujet d'un si étrange résultat.

M. Hoüel nous a communiqué, à l'occasion des remarques de 1863, plusieurs observations, que nos lecteurs seront bien aises de trouver ici. On avait dit que les erreurs de transcription provenaient sans doute de l'habitude d'épeler le logarithme trouvé dans la table, au lieu de l'énoncer. Tel n'est pas l'avis de M. Hoüel.

» Vous dites que pour éviter les erreurs de transcription des logarithmes, il vaut mieux les énoncer que les épeler. Je suis arrivé à une conclusion toute contraire, et pour diminuer le nombre des erreurs je ne trouve pas de meilleur remède que d'*épeler* le nombre *tout entier*, en énonçant chaque chiffre mentalement, à intervalles égaux, *en mesure*. Pour cela, au lieu de zéro, qui est de deux syllabes, je dis simplement O. Cela fait, le nombre reste parfaitement gravé dans l'oreille pendant le temps nécessaire pour sa transcription. Cette transcription faite, on recommence de nouveau, et avec beaucoup d'attention, la lecture du nombre, et il est très-aisé de voir si cette seconde lecture s'accorde avec la première. »

Le moyen semble fort bon, puisqu'il est entendu que ce n'est pas d'une simple épellation qu'il s'agit, mais d'une épellation *en mesure*. Mais ce n'est pas ainsi que les élèves la pratiquent. Ils écrivent chiffre par chiffre, en faisant autant de voyages, de leur copie à la table, qu'il y a de chiffres à écrire. C'est évidemment une mauvaise méthode.

Au reste, en conseillant d'énoncer le logarithme à transcrire, nous ne prétendons pas qu'on doive l'énoncer en entier, mais seulement par tranches, Ainsi, 3243227 se prononcerait : trois cent vingt-quatre ; trente-deux ; vingt-sept.

« Je vous signalerai en outre, continue M. Hoüel, une autre recommandation qu'il serait bon de faire aux candidats et que je fais constamment à tous ceux que je vois. Malheureusement, étant seul à parler, je parle dans le désert : c'est de se servir, pour les interpolations, de la règle à calcul, cet admirable petit instrument que l'on a discrédité en voulant le faire servir à trop d'usages, mais qui n'en est pas moins précieux quand il s'agit de multiplications ou de divisions qui ne dépassent pas deux ou trois chiffres. Il existe contre cet instrument, dans le corps enseignant, un préjugé regrettable.

» Il y a bien encore une critique que j'aurais à faire sur l'usage du nombre cabalistique de 7 décimales. Un savant distingué m'écrivait dernièrement que l'inutile emploi d'un si grand nombre de décimales était ce qui avait le plus nui à la propagation des logarithmes. Mais ceci ne dépend pas des professeurs ni des élèves (*).

» En pratique, il est beaucoup plus commode de s'accoutumer à considérer les différences tabulaires, tantôt comme additives, tantôt comme soustractives. Pour éviter les erreurs qui peuvent naître de cette cause, il faut toujours, après l'interpolation, s'assurer que le logarithme est compris entre les deux qui correspondent aux arguments entre lesquels se trouve l'argument donné. C'est une précaution indispensable, surtout pour les commençants. »

(*) M. Hoüel a raison : quatre ou cinq décimales suffisent ordinairement. Mais les programmes ayant prescrit l'usage des tables à sept décimales, il faut bien que les élèves se servent de ces tables. S'il y a temps perdu, cela regarde les *savants pratiques* auxquels nous devons les programmes.

Nous n'ajouterons rien à ces sages recommandations, mais nous rappellerons aux candidats qu'ils doivent mettre sur leur copie tous les calculs accessoires, dont la connaissance est indispensable au correcteur pour reconnaître l'origine et l'importance des fautes commises. Il convient, à cet effet, de diviser la page en deux colonnes (non compris la marge, qui doit être laissée vide pour les corrections). Dans l'une se trouveront les calculs accessoires, dans l'autre les valeurs définitives des logarithmes et les calculs effectués sur eux pour arriver aux résultats.

Composition de Mathématiques.

La composition de Mathématiques a donné au correcteur l'occasion d'observer que la plupart des élèves ne se font pas une idée bien nette de ce qu'on doit entendre par la discussion d'un problème. Presque tous s'imaginent qu'il n'y a qu'à examiner isolément les cas singuliers et pour ainsi dire exceptionnels qui se présentent. Un cas particulier très-simple, dont la solution est évidente, peut servir à vérifier une formule, mais il n'entre en général dans la discussion d'un problème que d'une manière incidente et comme marquant une limite à certaines modifications que la solution éprouve quand on fait varier les données d'une manière continue.

Voici la marche qu'il convenait de suivre. La définition du lieu étant géométrique, son aspect général devait se déduire de la construction même indiquée par l'énoncé. La symétrie de la courbe, par rapport à la ligne des centres, l'existence de branches infinies, les directions asymptotiques, tout cela résultait sans effort d'un premier coup d'œil jeté sur la question.

Les autres propriétés de la courbe étant plus cachées, on aurait risqué de perdre son temps à les chercher par une voie purement géométrique. Il fallait donc recourir au calcul et tout d'abord choisir des axes convenables. La ligne des centres se présentait naturellement comme axe des x. Quant à l'axe des y, on pouvait prendre la sécante commune, les points d'intersection des deux circonférences devant nécessairement appartenir au lieu; mais cela n'était pas indispensable. En prenant pour origine le centre de la première circonférence, ce qui simplifiait l'équation de la tangente à cette ligne, on arrivait à une équation susceptible d'être simplifiée par un déplacement de l'origine, ce qui conduisait à prendre l'axe radical pour axe des y. Beaucoup d'élèves ne l'ont pas vu. Ayant trouvé un terme de la forme $(x-\alpha)^2$, au lieu de changer $x-\alpha$ en x, ce qui abrégeait beaucoup, ils ont développé et obtenu une expression compliquée. Il était pourtant possible de tirer un bon parti de l'équation obtenue, en conservant $(x-\alpha)^2$. Il aurait suffi pour cela, suivant l'excellent conseil de M. P. Serret (*voir* p. 49), de ne pas développer, dès le commencement, les diverses fonctions qui entrent dans le calcul, et de les retenir au contraire jusqu'à la fin sous leur forme la plus concise.

Toute transformation algébrique sans but nettement déterminé constitue une opération mécanique, inintelligente, ne pouvant conduire à un résultat que par hasard. Or, il n'est pas prudent de compter sur le hasard dans une composition. L'Algèbre est comme un instrument qui n'a de valeur que par l'intelligence qui le met en œuvre. Sous ce rapport, le correcteur a reconnu chez un grand nombre d'élèves la mauvaise habitude d'abandonner la réflexion pour le calcul. On a groupé des termes, complété des carrés, décomposé des produits, etc., tout cela sans but apparent, et, disons-le aussi, sans résultat. Que pouvait espérer l'élève qui, après avoir obtenu une équation fort simple, ce qui est déjà un grand bonheur, a perdu beaucoup de papier et, chose bien plus précieuse, beaucoup de temps, à la compliquer sous cette forme étrange :

$$[(x-d)^2+y^2]\ r^4+[y^2+(x-d)^2-R^2]\ (d^2x^2-2R^2dx)$$
$$+(x^2+y^2)(R^4-2R^2r^2+2R^2dx-R^2dx)=0?$$

Sans doute, il était à la recherche de quelque artifice de calcul et il espérait le trouver sur sa route. Mais les artifices de calcul sont comme l'esprit, il ne faut pas courir après. D'ailleurs, ces décompositions savantes, au moyen desquelles on résout en deux traits de plume des problèmes fort difficiles, ont été imaginées le plus souvent après coup, par des gens dénués d'initiative, qui connaissaient le résultat d'avance et s'arrangeaient de manière à le *retrouver*.

L'équation obtenue, il s'agissait d'en tirer parti. Il fallait pour cela traiter un cas assez étendu, par exemple celui des cercles extérieurs, et faire ensuite varier les données d'une manière continue. On obtenait aisément, et par l'application des plus simples règles de la Géométrie analytique, une courbe composée de deux branches, symétriques par rapport à l'axe des x, rencontrant cet axe en un même point, qui est pour chaque branche un point d'inflexion. Il existe deux asymptotes parallèles à l'axe des y.

Pour obtenir ensuite la courbe dans les autres cas, on pouvait faire décroître progressivement la ligne des centres, et l'on trouvait une cissoïde dans le cas des cercles tangents extérieurement, deux branches séparées l'une de l'autre dans le cas des cercles extérieurs, de nouveau une cissoïde dans le cas des cercles tangents intérieurement; une courbe analogue à celle trouvée en premier lieu, dans le cas des cercles extérieurs, laquelle passe tout entière à l'infini quand les deux cercles deviennent concentriques. L'équation de la courbe montrait que le rayon de la circonférence (C') ne pouvait avoir aucune influence sur la forme du lieu. Ainsi, les cas de $R > R'$, $R = R'$, $R < R'$, examinés par quelques-uns, ne présentaient aucun intérêt.

D'ailleurs, la partie de l'énoncé où l'on demandait la forme de la courbe suivant les diverses positions relatives des deux cercles traçait clairement la marche à suivre dans la discussion.

Telles sont les observations du correcteur en ce qui concerne le fond de la question. Pour ce qui regarde la forme, il a trouvé quelques compositions très-bien rédigées, d'autres passablement, et d'autres tout à fait mal. Quelques-unes même ressemblaient à des notes prises à la volée, comme on les écrirait en assistant à un cours. En voici des échantillons textuels :

« On voit donc que ces directrices (celles des asymptotes) sont deux fois l'axe de y, et les deux autres sont imaginaires. »

« Le lieu prend la forme $o = o$. »

« Telle est l'éq. des 2 tg. »

« Si $x - x_1 = o$, $y'_1 = y'$ donc tg. »

« Le lieu est tangent en R à l'axe des x. »

« Cherchons l'intersection de (1) avec (6); ou avec une comb. de (1) et de (6). »

« En substituant nous aurons pour (5). »

« Deux points A', A'' d'abscisses a', a'' (*). »

« Une pp à OO''. »

(*) On dit quelquefois une *ellipse d'axes a et b*, un *cercle de rayon* R, etc., mais à tort; dirait-on un *cercle de rayon deux mètres ?* Le respect de la langue et la profondeur peuvent très-bien se concilier, comme l'ont montré par leur exemple les plus grands géomètres.

« Il me vient pour le lieu. »

« y sera imaginaire pour des valeurs $>$ ou $<$. »

Les élèves peuvent être rangés dans trois catégories : 1° ceux qui calculent sans réfléchir ; 2° ceux qui calculent d'abord et réfléchissent ensuite ; 3° ceux qui commencent par réfléchir et ne calculent que pour développer leur pensée. Ces derniers sont seuls capables de bien rédiger, car, maîtres de leur sujet, ils peuvent en exposer les diverses parties dans l'ordre le plus convenable et avec la précision nécessaire. Une bonne exposition est donc une preuve d'intelligence et de goût, qualités précieuses dont le correcteur comme l'examinateur ne peuvent manquer de tenir compte dans leur appréciation.

P.