Nouvelles annales de mathématiques

Alfred-Isidore-François Salles

Composition de mathématiques pour l'admission à l'École polytechnique en 1863

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 268-276

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__268_0>

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1863;

SOLUTION PAR M. ALFRED-ISIDORE-FRANÇOIS SALLES (*),
Élève du lycée de Montpellier (classe de M. Berger)

On donne sur un plan deux circonférences C *et* C'; *d'un point* A *de* C, *on mène des tangentes à* C', *on joint les points de contact de ces tangentes; cette droite coupe la tangente menée en* A *à la circonférence* C *en un point* M : *on demande l'équation du lieu décrit par* M, *lorsque* A *parcourt la circonférence* C.

Examiner les différentes formes de ce lieu selon la grandeur et la position relative des circonférences C *et* C'.

Indiquer les cas où il se décompose : faire voir que le lieu des points M *est tangent à la circonférence* C *en chacun des points d'intersection de cette courbe et de la circonférence* C'.

Je prends pour axe des y l'axe radical des deux circonférences données; pour axe des x la ligne des centres; les équations des deux circonférences seront alors

$$(1)\qquad x^2 + y^2 - 2ax - k^2 = 0,$$

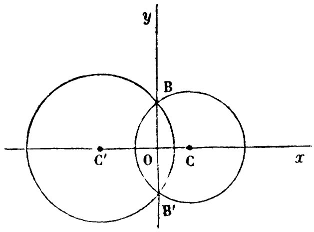
$$(2)\qquad x^2 + y^2 - 2a'x - k^2 = 0.$$

a désigne la distance CO du centre de la première circonférence à l'origine, distance que nous pouvons toujours regarder comme positive; a' désigne la distance C'O

(*) Reçu le 35e, aujourd'hui le 9e. Cette composition a eu la note 18. Nous la reproduisons textuellement sans même corriger quelques légères incorrections ou inadvertances.

qui peut prendre toutes les valeurs positives ou négatives,

Fig. 1.



excepté cependant la valeur a. Les polaires du point (α, β) par rapport aux courbes (1) et (2) *sont*

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha(x-a\,)+\beta y-a\,x-k^2=0,\\ &\alpha(x-a')+\beta y-a'x-k^2=0;\end{aligned}\right.$$

les abscisses d'intersection de ces deux droites s'obtiennent facilement en retranchant leurs équations. On trouve ainsi

$$\left\{\begin{aligned} &x=-\alpha,\\ &y=\frac{k^2+\alpha^2}{\beta},\end{aligned}\right.$$

la valeur $x=-\alpha$ (*) donne un théorème de Géométrie inutile à énoncer. Si maintenant le point (α, β) décrit une courbe quelconque $f(\alpha, \beta)=0$, le lieu du point de rencontre des deux polaires d'un point (α, β) de cette courbe aura pour équation

$$f\left(-x, \frac{k^2+x^2}{y}\right)=0.$$

(*) Il valait mieux déduire de là, comme l'ont fait quelques candidats, une construction du lieu plus simple que celle de l'énoncé. *On mène à la circonférence* C *une tangente* AB *au point* A *de cette courbe : cette droite coupe l'axe radical* Oy *en un point* B; *on prolonge* AB, *et sur ce prolongement on prend* BN = AB. *Le point* N *décrit le lieu.*

Si le point (α, β) décrit une droite, le point (x, y) décrit une conique. En effet, si on a

$$A\alpha + B\beta + C = 0,$$

on aura

$$-Axy + Bx^2 + Cy - Bk^2 = 0,$$

hyperbole passant aux points B, B′ et dont l'équation ne dépend que de k^2 ; ainsi ce lieu est le même pour tous les cercles qui ont même axe radical, c'est-à-dire pour tous les cercles qui ont quatre points communs (*). Cette remarque est susceptible de généralisation ; quelle que soit la fonction $f(\alpha, \beta) = 0$, le lieu du point (x, y) restera le même pour toutes les coniques qui ont quatre points communs. Cela résulte de l'équation

$$f\left(-x, \frac{k^2 + x^2}{y}\right) = 0,$$

mais c'est aussi une conséquence de ce théorème connu : les polaires d'un point fixe par rapport à toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère se coupent en un même point. Appliquons ce qui précède au cas particulier où le point (α, β) décrit le cercle (1) : on a

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha - k^2 = 0;$$

donc le lieu du point M demandé a pour équation

$$(3) \qquad x^2 + \frac{(k^2 + x^2)^2}{y^2} + 2ax - k^2 = 0.$$

Multiplions par y^2 après nous être assuré que l'axe des x ne fait point partie du lieu : l'équation du lieu du point M s'écrit

$$(4) \qquad y^2 = \frac{(k^2 + x^2)^2}{k^2 - 2ax - x^2}.$$

Avant de discuter cette équation, qui ne dépend nulle-

(*) Dont deux à l'infini. P.

ment du cercle (2) (*), je vais montrer que cette courbe (4) est tangente au cercle (1) aux points B et B'. Cherchons l'*intersection de* (1) *et de* (4) (**) : on a pour déterminer les abscisses d'intersection l'équation

$$(2ax + k^2 - x^2)(2ax + x^2 - k^2) + (k^2 + x^2)^2 = 0,$$

équation qui se réduit à

$$4(a^2 + k^2)x^2 = 0;$$

mais on a, en désignant par R le rayon du cercle (1),

$$k^2 = R^2 - a^2.$$

Donc, comme R n'est pas nul, l'intersection de (1) et de (4) est fournie par l'intersection de (1) avec les droites $x = 0$ et $x = 0$. Donc (1) et (4) *sont tangentes en* B et B', et cela quel que soit R^2, positif, nul ou négatif. On a toujours encore

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2(k^2 + x^2)}{(k^2 - 2ax + x^2)^2}(ak^2 + 3k^2x - 3ax^2 - x^3),$$

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ak^2 + 3k^2x - 3ax^2 - x^3}{(k^2 - 2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(*) Le rayon de ce cercle n'ayant aucune influence sur le lieu cherché, en le supposant infini on parvient à la construction indiquée dans la note précédente (p. 269). En supposant ce rayon nul, on ramène le problème au suivant : *Une circonférence* (C) *et un point fixe* F *sont donnés; on mène une tangente à* (C) *au point* A *de cette courbe, on prend sur cette tangente une longueur* AM *vue du point* F *sous un angle droit : lorsque* A *parcourt la circonférence* (C), *quel est le lieu décrit par le point* M? Le lieu de la composition est encore identique : 1° au lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique et à une certaine parabole ayant le même axe focal et un foyer commun; 2° au lieu des points de contact sur une circonférence mobile ayant même axe radical qu'une circonférence fixe, des tangentes communes à ces deux circonférences; 3° au lieu de la seconde composition, rapportée dans le numéro de décembre 1863, p. 551.

(*Communiqué.*)

(**) Le numéro qui rappelle une équation peut aussi désigner la courbe que cette équation représente; mais dans ce cas il faudrait dire l'intersection des courbes (1) et (4). En répétant le mot *courbe* devant le nu-

Discussion de la courbe (4).

Je distinguerai trois cas :

Premier cas : $k^2 > 0$. — Comme on a $k^2 = R^2 - a^2$, R sera plus grand que a ; d'ailleurs

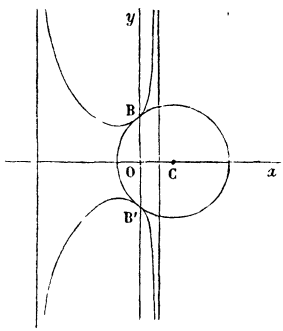
$$x^2 + 2ax - k^2 = (x + a + R)(x + a - R);$$

la courbe (4) *devient* donc

$$y^2 = \frac{(x^2 + k^2)^2}{(R - x - a)(R + x + a)},$$

courbe qui ne coupe pas l'axe Ox, qui rencontre l'axe Oy

FIG. 2.



aux deux points B, B', et comprise entre les deux droites asymptotes

$$x = R - a,$$
$$x = -(R + a).$$

Cela donne déjà une idée de la forme de la courbe. Pour achever de le déterminer, je vais étudier la dérivée (5). Pour tout point de la courbe, $k^2 - 2ax - x^2 > 0$, et comme nous pouvons nous borner à considérer les points

méro, on éviterait des incorrections choquantes comme celle-ci : *un et quatre sont tangentes.* P.

situés au-dessus de Ox, il s'ensuit que

$$(k^2 - 2ax - x^2)^{\frac{3}{2}} > 0.$$

L'étude de la dérivée revient donc à l'étude de la fonction $ak^2 + 3k^2x - 3ax^2 - x^3$. Considérons l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3ax^2 - 3k^2x - ak^2 = 0;$$

remplaçons k^2 par $R^2 - a^2$, elle devient

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 3(R^2 - a^2)x - a(R^2 - a^2) = 0.$$

Cette équation a trois racines réelles, ce que montre le tableau suivant :

(6)

x	$f(x)$
$+\infty$	$+\infty$
$R - a$	$-2R^3$
0	$-a(R^2 - a^2)$
$-\frac{a}{3}$	$\frac{8a^3}{27}$
$-(R+a)$	$+2R^3$
$-\infty$	$-\infty$

L'on voit par là que la tangente de la courbe (4) est horizontale seulement en un point dont l'abscisse est comprise entre o et $-\frac{a}{3}$; les deux autres racines ne conviennent pas évidemment à la courbe. On conclut de là que la courbe (4) a *rigoureusement* (*) la forme indiquée. L'équation (5) peut montrer ce que nous avons déjà

(*) Ce mot était bien inutile ici. P.

vu : *que* (4) *est tangente à* (1) aux points B et B'. En effet, faisons dans (5) $x = 0$, il vient $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{k}$: c'est précisément le coefficient angulaire de la tangente en B au cercle (1).

Dans ce cas, l'équation (4) ne peut jamais s'abaisser. En effet, pour que cela eût lieu, il faudrait que le numérateur et le dénominateur de y^2 aient des racines communes, ce qui est impossible, le numérateur n'ayant que des racines imaginaires, le dénominateur que des racines réelles. Lorsque $a = 0$, le cercle (1) est décrit sur BB' comme diamètre; la courbe admet alors le point O pour centre, la dérivée s'annule par $x = 0$, l'équation (4) devient

$$y^2 = \frac{(x^2 + k^2)^2}{k^2 - x^2} = \frac{(x^2 + R^2)^2}{R^2 - x^2},$$

courbe que l'on rencontre dans divers problèmes sur le cercle.

Deuxième cas : $k^2 = 0$. — Dans le cas précédent, les cercles (1) et (2) se coupaient en deux points réels : ici, ils sont tangents. L'équation (4) devient

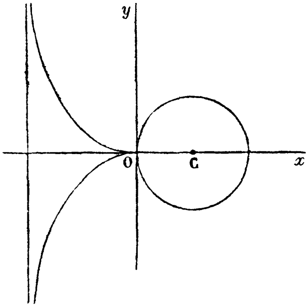
$$y^2 = -\frac{x^3 . x}{(x + 2a) . x},$$

et se décompose en deux $x = 0$: c'est l'axe des y, qui appartient au lieu (car les polaires du point O relatives à tous les cercles tangents à Oy en O coïncident), et

$$y^2 = \frac{-x^3}{x + 2a}.$$

cissoïde, courbe connue qu'il me semble inutile de discuter ici, et dont il n'y a pas lieu de rappeler les propriétés : la construction de la courbe donnée par Newton, la construction de la tangente en un point fondée sur le centre instantané de rotation, ou bien sur la propriété dont

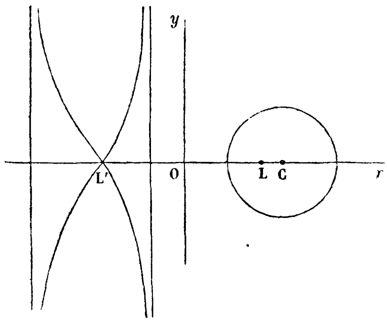
Fig. 3.



jouit la cissoïde d'être la podaire d'une parabole, etc., etc. On peut remarquer encore que dans ce cas la courbe (4) est tangente aux points B, B′ confondus en O : en effet, Oy fait parti du lieu.

Troisième cas : $k^2 < 0$. — Les deux cercles se coupent

Fig. 4.



en deux points imaginaires. Comme on a toujours $k^2 = R^2 - a^2$, il suit que $R < a$, l'équation (4) s'écrit toujours

$$y^2 = \frac{(x^2 + k^2)^2}{(R + x + a)(R - x - a)} = \frac{(x^2 + R^2 - a^2)^2}{(R + x + a)(R - x - a)}.$$

Les deux asymptotes qui limitent la courbe sont

$$x = -(a + \mathrm{R}),$$
$$x = -(a - \mathrm{R});$$

elles sont toutes deux à gauche de Oy. La courbe coupe l'axe des x en deux points

$$x = \pm \sqrt{a^2 - \mathrm{R}^2}.$$

On reconnaît facilement que

$$a - \mathrm{R} < + \sqrt{a^2 - \mathrm{R}^2}, \quad a + \mathrm{R} > \sqrt{a^2 + \mathrm{R}^2}.$$

Le point L est donc un point isolé; le point L′ est un point de la courbe. Il me semble que ces *deux points* L et L′ *sont les points limites* de M. Poncelet. D'ailleurs, comme la dérivée (5) ne s'annule pas pour

$$x = - \sqrt{a^2 - \mathrm{R}^2},$$

il s'ensuit que la courbe a la forme indiquée. Le point L′ est un point double; en effet, dans l'équation qui précède (5), on voit que lorsque $x^2 + k^2 = 0$, auquel cas $y = 0$, cette équation devient

$$0 . \frac{dy}{dx} = 0.$$

Pour trouver les tangentes au point L′, il faudrait recourir à $\frac{d^2y}{dx^2}$ (*).

(*) Inachevé. Plusieurs candidats ont pensé que la courbe touchait l'axe des x au point L′, parce qu'ils obtenaient un carré parfait en faisant $y = 0$. Mais le point en question étant multiple, cette circonstance ne pouvait rien apprendre sur la direction de la tangente.