Nouvelles annales de mathématiques

Painvin

Recherche des points multiples à l'infini dans les courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 193-199

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__193_0>

RECHERCHE DES POINTS MULTIPLES A L'INFINI DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES

(voir page 145);

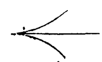
PAR M. PAINVIN.

§ II. — *Points doubles à l'infini.*

VI. Je rappelle d'abord la classification des points doubles. En un point double, il y a deux tangentes; trois cas peuvent se présenter :

1° Les deux tangentes sont réelles. — *Point double ordinaire.*

2° Les deux tangentes sont imaginaires. — *Point double isolé.*

3° Les deux tangentes se confondent. —
- I. *Point de rebroussement :*
  - 1re espèce 
  - 2e espèce 
- II. *Point de rebroussement isolé.*
- III. *Contact de deux branches de la courbe.*

J'ajouterai cette remarque, que dans le rebroussement de deuxième espèce et dans le contact de deux branches, la tangente a un contact d'ordre plus élevé que dans le rebroussement de première espèce.

VII. Considérons toujours la direction asymptotique $y - ax = 0$ et le point à l'infini correspondant

$$\mathrm{I}\quad \left\{ \begin{array}{l} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{array} \right.$$

Supposons qu'on ait [équation (5)]

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_n\ \ (1, a) = 0,\\ \varphi'_n\ \ (1, a) = 0,\\ \varphi_{n-1}(1, a) = 0,\end{array}\right.$$

c'est-à-dire que l'équation de la courbe se présente sous la forme

$$(9)\quad (y - ax)^2 u_{n-2} + z(y - ax)v_{n-2} + z^2\varphi_{n-2} + z^3\varphi_{n-3} + \ldots = 0;$$

la valeur (6) de λ est alors indéterminée.

Une droite *quelconque* passant par le point I

$$y - ax = \lambda z$$

y rencontre la courbe en deux points coïncidents, car le premier membre de l'équation (9) est alors divisible par z^2 quel que soit λ; le point I est donc un point double.

Les deux tangentes proprement dites en ce point double s'obtiendront en déterminant λ de manière que le premier membre de l'équation soit divisible par z^3. D'après l'équation (5), nous aurons pour déterminer λ l'équation

$$(10)\qquad \frac{\lambda^2}{1.2}\varphi''_n(1, a) + \frac{\lambda}{1}\varphi'_{n-1}(1, a) + \varphi_{n-2}(1, a) = 0.$$

On a ainsi deux valeurs pour λ; les deux tangentes en un point double à l'infini sont donc deux asymptotes parallèles; c'est visible *à priori*.

VIII. Discussion de l'équation (10).

1° Les deux racines de l'équation (10) sont réelles et inégales : on a un point double à l'infini dont les deux tangentes sont deux asymptotes parallèles à la droite

$$y - ax = 0.$$

2° Les deux racines sont imaginaires : on a un point double isolé à l'infini.

3° Les deux racines sont égales : on a à l'infini un point de rebroussement proprement dit ou un point de rebroussement isolé, suivant que les branches de courbe correspondant à cette direction asymptotique sont réelles ou imaginaires.

4° Une des racines est infinie : une des tangentes au point double est alors la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique. L'équation de la courbe est de la forme

$$(y - ax)^3 u_{n-3} + z(y - ax) u_{n-2} + z^2 \varphi_{n-2} + z^3 \varphi_{n-3} + \ldots = 0.$$

5° Les deux racines sont infinies : les deux tangentes au point double se confondent avec la droite à l'infini ; on a un rebroussement à l'infini, et la tangente de rebroussement est la droite à l'infini parallèle à la direction asymptotique. L'équation de la courbe est de la forme

$$(y - ax)^3 u_{n-3} + z(y - ax)^2 v_{n-3} + z^2 \varphi_{n-2} + z^3 \varphi_{n-3} + \ldots = 0.$$

6° Lorsque le coefficient angulaire a a la valeur particulière $\sqrt{-1}$, l'équation de la courbe, si l'on suppose ses coefficients réels, se présentera alors sous la forme [d'après l'équation (9)]

$$(x^2 + y^2)^2 u_{n-4} + z(x^2 + y^2) u_{n-3} + z^2 \varphi_{n-2} + z^3 \varphi_{n-3} + \ldots = 0.$$

Les deux points circulaires à l'infini sont deux points doubles de la courbe. Ces points sont, il est vrai, imaginaires, et ne s'offriront pas dans la représentation réelle de la courbe. Mais, comme je l'ai fait remarquer au commencement, ils ont sur la classe de la courbe la même influence que les points doubles réels. Et on doit effectuer la recherche des points multiples imaginaires aussi bien que des points réels, si l'on veut connaître toutes les causes de la diminution de la classe dans une courbe donnée.

Remarque. — Les tangentes proprement dites aux points doubles peuvent, comme dans le cas des points simples, avoir avec la courbe un contact d'un ordre plus élevé que le premier.

§ III. — *Points multiples à l'infini.*

IX. Soit une direction asymptotique ($y - ax = 0$); l'équation d'une droite *quelconque*, passant par le point à l'infini I correspondant, sera

$$y - ax = \lambda z.$$

Si, après avoir remplacé y par la valeur que fournit cette équation, le premier membre de l'équation de la courbe est divisible par z^p, quel que soit λ, le point I sera un *point multiple d'ordre p*; car une droite *quelconque* y rencontre la courbe en p points confondus avec le point I.

Pour obtenir les tangentes proprement dites en ce point, il suffira de déterminer λ de manière que le premier membre de l'équation soit divisible par z^{p+1}; on obtiendra ainsi p asymptotes parallèles à la direction asymptotique considérée.

Les valeurs de λ seront données par l'équation obtenue en égalant à zéro le coefficient de z^p [équation (5)].

La discussion présentera des variétés du même genre que celles que nous avons rencontrées dans les points doubles; il n'y a là aucune difficulté théorique.

X. Je terminerai cette Note par l'examen des diverses particularités qui peuvent se présenter lorsque plusieurs directions asymptotiques viennent à coïncider.

Soit, par exemple,

$$\varphi_n(x, y) = (y - ax)^p u_{n-p};$$

cherchons les singularités qu'on pourra rencontrer au point à l'infini

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{c} z = 0, \\ y - ax = 0. \end{array}\right.$$

1^er^ Cas. — L'équation de la courbe est de la forme

$$(\mathrm{I}) \quad (y - ax)^p u_{n-p} + z\varphi_{n-1} + z^2\varphi_{n-2} + z^3\varphi_{n-3} + \ldots = 0,$$

φ_{n-1} n'admettant pas le facteur $(y - ax)$.

Le point I est alors un point simple; l'asymptote est la droite à l'infini, laquelle a avec la courbe un contact du $(p - 1)^{ième}$ ordre; ce cas a été discuté n° 5, remarque II.

2^e^ Cas. — L'équation de la courbe est de la forme

$$(\mathrm{II}) \left\{\begin{array}{c} (y - ax)^p u_{n-p} + z(y - ax)^{p-1} v_{n-p} \\ + z^2(y - ax)^{p-2} w_{n-p} + \ldots + z^{p-1}(y - ax) t_{n-p} \\ + z^p \varphi_{n-p} + z^{p+1}\varphi_{n-p-1} + \ldots + z^n \varphi_0 \end{array}\right\} = 0.$$

Le point I est alors un point multiple d'ordre p; car une droite *quelconque* passant par le point I y rencontre la courbe en p points coïncidents.

3^e^ Cas. — Le degré d'un des termes précédant z^p est, par rapport à z et $(y - ax)$ à la fois, inférieur à p; ainsi l'équation serait de la forme

$$(\mathrm{III}) \left\{\begin{array}{l} (y - ax)^p u_{n-p} + \ldots + z^k (y - ax)^{p-k-i} u_{n-p+i} + \ldots \\ \qquad + z^p \varphi_{n-p} + z^{p+1}\varphi_{n-p-1} + \ldots = 0, \end{array}\right.$$

le degré des termes qui précèdent z^k étant, par rapport à z et $(y - ax)$ à la fois, au moins égal à p.

Dans ce cas, le point $(z = 0,\ y - ax = 0)$ est un point multiple d'ordre $(p-i)$, car une droite *quelconque* passant par ce point y rencontre la courbe en $(p-i)$ points coïncidents seulement, quel que soit λ.

En outre, la droite à l'infini touche la courbe au point I; car, en cherchant l'intersection de la courbe avec la droite à l'infini $z=0$, on trouve

$$(y-ax)^p u_{n-p}=0;$$

donc cette droite rencontre la courbe en p points confondus avec le point I : or, sur les $(p-i)$ points qui caractérisent le point multiple, il y en a un appartenant à la branche que touche la droite $z=0$, et, comme cette droite a, en outre, $p-(p-i)=i$ points communs, j'en conclus qu'elle a avec la branche à laquelle elle est tangente proprement dite $(i+1)$ points communs; donc la *droite à l'infini a avec la courbe un contact de l'ordre i.*

4^e Cas. — L'équation de la courbe est de la forme

$$\text{(IV)} \quad (y-ax)^p u_{n-p}+z^p\varphi_{n-p}+z^{p+1}\varphi_{n-p-1}+\ldots=0,$$

c'est-à-dire l'équation ne contient aucune des puissances de z inférieures à p.

Le point I est encore un point multiple d'ordre p; les p tangentes en ce point seront données par l'équation

$$\lambda^p u_{n-p}(1,a)+\varphi_{n-p}(1,a)=0.$$

Cette équation a une seule racine réelle si p est impair, et elle n'a que deux racines réelles ou aucune racine réelle si p est pair; donc, par le point I$(z=0, y-ax=0)$, il peut ne passer aucune branche réelle de la courbe, ou il peut n'en passer qu'une seule, ou il peut en passer deux réelles au plus.

Ce qu'il faut ici remarquer, c'est que les asymptotes, correspondant aux autres points à l'infini, coïncident avec les directions asymptotiques et ont avec la courbe un contact du $(p-1)^{\text{ième}}$ ordre.

Soit, en effet,

$$u_{n-p} = (y - a_1 x) u_{n-p-1};$$

cherchons l'intersection avec la courbe de la droite

$$y - a_1 x = \lambda z$$

passant par le point à l'infini $(z = 0, y - a_1 x = 0)$.

On a, d'après l'équation (IV)

$$\left.\begin{array}{l} [(a_1 - a)x + \lambda z]^p . \lambda z \\ \times [u_{n-p-1}(1, a_1) x^{n-p-1} + z x^{n-p-2} u'_{n-p-1}(1, a_1) + \ldots] \\ + z^p \varphi_{n-p}(x, a_1 x + \lambda z) + z^{o+1} \varphi_{n-p-1}(x, a_1 x + \lambda z) + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

On voit que pour obtenir la tangente au point

$$\mathrm{I}_1 (z = 0,\ y - a_1 x = 0),$$

il faudra faire $\lambda = 0$, pourvu toutefois que $\varphi_n(x, y)$ ou u_{n-p} ne contienne pas $(y - a_1 x)$ à une puissance égale à p; le premier membre de l'équation est alors divisible par z^p : c'est dire que la droite $y - a_1 x = 0$ a avec la courbe un contact du $(p-1)^{\text{ième}}$ ordre.

(*La suite prochainement.*)