Questions d'examen (1863)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 177-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__177_0>

QUESTIONS D'EXAMEN (1863)

(voir p. 141)

Géométrie analytique. (Suite.)

70. On donne un cercle et deux points fixes M et N. On mène la droite MA qui aboutit à un point quelconque A de la circonférence, et l'on prend le milieu I de MA. Enfin on prend, sur NI, $NG = \frac{1}{3}NI$. Lieu des points G.

71. On mène par un même point des normales à un système d'ellipses semblables et concentriques. Lieu des pieds de ces normales.

72. Équation d'une courbe du deuxième degré qui serait doublement tangente à la courbe dont l'équation est

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x - 2y - 1 = 0.$$

Montrer *à priori* que cette équation ne doit renfermer qu'un seul paramètre arbitraire.

73. A combien de conditions une courbe du deuxième degré est-elle assujettie quand on demande qu'elle touche une courbe donnée aux points où celle-ci est rencontrée par une droite donnée?

74. On donne une courbe du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0,$$

et le cercle

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

On demande l'équation qui a pour racines les coefficients angulaires des droites qui joignent l'origine aux points d'intersection des deux courbes. Pourquoi cette équation est-elle du second degré? Disposer de R de manière que cette équation ait des racines égales.

75. Soit un diamètre MM′ d'un cercle. Par le point M′ on mène une droite qui rencontre en A la circonférence et en B la tangente menée par le point M. Sur cette droite on prend $M'D = AB$. Lieu des points D. Discussion.

76. Par le foyer d'une ellipse, on mène à la directrice correspondante la droite FAB qui rencontre l'ellipse en A et la directrice en B. On a

$$\frac{1}{FA} - \frac{1}{FB} = \text{constante}.$$

77. Équation d'une parabole tangente à l'axe des x au point $(x = 1, y = 0)$, et dont l'axe est parallèle à la bissectrice de l'angle xOy.

78. Discuter la courbe

$$(y - x + 1)(x + y + 2) = 3.$$

79. $P = 0$, $Q = 0$ étant les équations de deux droites, comment sont placées, par rapport aux axes, les droites

$$P + \delta Q = 0, \quad P - \delta Q = 0?$$

80. Propriétés communes à toutes les courbes

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \ldots = 0$$

dans lesquelles A seul est variable. Peut-on trouver une valeur de A telle, que l'équation représente deux droites? Comment seront placées les courbes par rapport à ces deux droites?

81. On mène par un point M d'une parabole une tangente à cette courbe, qui rencontre la directrice au point I, et, par le point M, une normale qui rencontre la courbe

en un second point N. Soit T le point où la tangente menée par N rencontre la tangente MI; on a MI = MN.

82. Reconnaître qu'une droite $y = mx + n$ est directrice d'une courbe donnée du second degré.

83. Lieu des points tels, que la somme des tangentes menées de ces points à deux circonférences données est constante.

84. Les directrices des coniques qui ont un foyer commun et un point commun passent par un même point.

85. Discuter les courbes

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}, \quad y^2 = \frac{1}{x^2 + x^3}, \quad y^2 = x^3 - x^4.$$

86. Étudier géométriquement le lieu des projections d'un point donné sur les tangentes qu'on peut mener à un cercle. Tangente. Degré du lieu. Équation du lieu. Question analogue pour l'ellipse.

87. Lieu des centres des coniques qui passent par quatre points donnés.

88. L'équation d'une conique étant

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

si l'on fait $y = p$, on trouvera pour x l'abscisse du foyer.

89.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 \ldots = 0, \quad A'x^2 + B'xy + C'y^2 + \ldots = 0$$

étant les équations de la même courbe dans deux systèmes différents de coordonnées rectangulaires, on a

$$A + C = A' + C' :$$

interprétation géométrique.

90. Lieu des sommets des angles de grandeur constante, circonscrits à une parabole.

91. OA et OB étant deux diamètres conjugués d'une ellipse, on abaisse BP perpendiculaire sur OA, et l'on prend BM égale à OA. Lieu des points M.

92. Deux côtés d'un triangle sont fixes; le troisième côté se meut de telle sorte que la surface du triangle reste constante. Lieu des points de concours des médianes.

93. Equation du cercle circonscrit à un triangle, dont chaque côté est donné par son équation.

94. Lieu des points tels, que si l'on mène deux tangentes à une parabole, la bissectrice de l'angle de ces tangentes fasse avec l'axe de la parabole un angle constant.

95. Étant données deux courbes

$$y = f(x), \quad y_1 = \varphi(x),$$

telles que $y^2 - y_1^2 = K^2$, trouver une relation entre les tangentes menées à ces deux courbes en deux points situés sur la même ordonnée.

96. Dans un triangle rectangle, le sommet de l'angle droit est fixe; un autre sommet se meut sur une droite à laquelle l'hypoténuse est perpendiculaire : trouver le lieu du troisième sommet.

97. Quelles sont les propriétés communes aux courbes

$$ax^2 + Kxy + by^2 + cx + dy + f = 0,$$

dans lesquelles K est un coefficient variable?

98. Lieu des pieds des normales abaissées d'un point sur des ellipses concentriques semblables et semblablement placées.

99. Soient OA, OB, DE trois droites fixes. On mène par un point C pris sur DE une droite mobile qui rencontre OA et OB en F et G. Lieu des points d'intersection des droites DG et FE. Démontrer que le lieu est la polaire du point C par rapport à la conique formée de l'ensemble des deux droites OA et OB.

100. Soit FM un rayon vecteur d'une ellipse. On mène MP perpendiculaire sur le grand axe et l'on prend PN = FM. Lieu des points N.

101. Lieu des sommets des paraboles qui ont un point commun et le même foyer.

Géométrie analytique à trois dimensions.

102. On donne dans le même plan une circonférence et un point. Par ce point pris comme sommet, on mène un cône tangent à une sphère qui passe par la circonférence donnée. Trouver le lieu des courbes de contact quand on fait varier le rayon de la sphère.

103. Lieu des points tels, que la différence des carrés de leurs distances à deux plans soit proportionnelle à leur distance à un troisième plan.

104. Discuter la surface

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2z = 0.$$

105. Lieu des points situés à égale distance d'un point fixe et d'un plan fixe.

106. Équation du paraboloïde hyperbolique rapporté à un de ses diamètres et aux deux génératrices rectilignes qui passent par le point où ce diamètre rencontre la surface.

107. Lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux plans donnés est égale à un carré donné.

108. Dans quel cas un plan peut-il couper une surface du second ordre suivant une seule droite ?

109. Lieu des milieux des droites qui s'appuient sur deux droites données et qui restent parallèles à un plan donné.

110. $P = o$, $P' = o$ étant les équations d'une droite, que représente l'équation

$$F(P, P') = o ?$$

111. Peut-on faire passer une surface du second degré par deux coniques situées d'une manière quelconque dans l'espace ?

112. Un paraboloïde hyperbolique ayant un premier système de génératrices parallèles au plan *horizontal*, prouver que les projections verticales de toutes les génératrices du deuxième système passent par un même point.

113. Étant donnée une surface du second ordre, on mène par l'origine des coordonnées des droites telles que AB qui rencontre la surface en deux points A et B, puis sur la droite un point M tel que

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}\right);$$

trouver le lieu des points M. Généralisation du problème pour une surface de degré m : lieu des points M tels que

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \ldots + \frac{1}{OL}\right),$$

A, B,..., L étant les points où la droite menée par l'origine rencontre la surface.

114. Peut-on couper un paraboloïde hyperbolique de manière que la section soit une hyperbole équilatère ?

115. Lorsque deux sections circulaires d'une surface du deuxième ordre sont perpendiculaires entre elles, la surface est une sphère.

116. Lieu des points tels, que le produit de leurs distances à deux plans fixes ou à deux droites fixes soit constant.

117. Propriétés communes aux cercles représentés par l'équation

$$x^2 + y^2 + \lambda x + by + c = 0,$$

où λ est un paramètre variable. Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point (α, β) à ces circonférences. Propriété commune à toutes les cordes de contact.

118. Combien faut-il connaître de génératrices d'un cône du second degré pour qu'il soit déterminé?

119. Si $Q = 0$ est l'équation d'une sphère et $P = 0$ celle d'un plan, que représente l'équation

$$F(Q, P) = 0?$$

120. Les axes de coordonnées n'étant pas rectangulaires, à quelle espèce de plans est rapporté le paraboloïde qui a pour équation

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2q} = x.$$

121. Quand deux angles trièdres trirectangles ont même sommet, leurs six arêtes sont sur un même cône du second degré.

122. On peut faire passer quatre cônes par les points communs à deux surfaces du second degré.

123.

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + \ldots = 0$$

étant l'équation d'une surface rapportée à des coordonnées rectangulaires, si l'on vient à changer d'axes, on aura

$$A + A' + A'' = \text{constante}.$$

Interprétation géométrique.

124. Sections circulaires de la surface

$$yx + yz + xz = 1.$$

125. Quelles relations y a-t-il entre les surfaces représentées par les équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) + k = 0\,?$$

126. Diamètres conjugués égaux dans l'ellipsoïde.

127. Lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à la surface $xy = z$.

128. Lieu du sommet d'un trièdre trirectangle circonscrit à l'ellipsoïde.

129. On a un ellipsoïde et une sphère concentriques : il y a un cône et trois cylindres qui passent par les points communs à ces deux surfaces. Les génératrices de ces trois cylindres sont perpendiculaires entre elles.

130. Lieu des points tels, que la somme des carrés de leurs distances à trois points fixes soit constante.

131. Étant donnés une surface du second ordre et un point fixe, on mène par ce point toutes les cordes dont ce point est le milieu. Lieu de ces droites.

132. Quand deux surfaces du second ordre ont un plan principal commun, l'intersection des surfaces se projette sur ce plan suivant une courbe du second degré.

(*La suite prochainement.*)