DARBOUX

Sur les sections du tore

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 156-165

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__156_1>

SUR LES SECTIONS DU TORE;

Par M. DARBOUX,
Élève de l'École Normale.

1. Le méridien du tore se compose de deux cercles symétriques. Décrivons des sphères ayant ces cercles mé-

ridiens pour grands cercles. Ces sphères seront tangentes au tore, je les appellerai *sphères inscrites*. Deux sphères inscrites *opposées* seront celles dont les centres seront dans un même plan méridien. J'appellerai *distance d'un point à une sphère* la longueur de la tangente menée de ce point à la sphère.

2. Théorème I. — *Le produit des distances d'un point quelconque du tore à deux sphères inscrites opposées est proportionnel à la distance de ce point au plan méridien contenant les centres des deux sphères.*

Soient b le rayon d'une sphère inscrite, a la distance de son centre à l'axe. Désignons par T, T' les longueurs des tangentes menées aux deux sphères opposées ayant leur centre sur l'axe des x, on a

$$TT' = 2ay.$$

La démonstration est facile, soit par l'analyse, soit par la géométrie.

Corollaire I. — Menons un plan sécant parallèle au plan des xz. Il coupera les deux sphères inscrites opposées suivant deux cercles égaux (réels ou imaginaires). Les tangentes à ces cercles seront aussi tangentes aux sphères. D'ailleurs, pour tout point de la section y est constant. Donc :

Une section verticale du tore est le lieu des points tels, que le produit de leurs distances à deux circonférences égales soit constant.

Ces deux circonférences égales se réduiront à des points quand le plan sécant sera tangent aux sphères inscrites. On aura donc une ellipse de Cassini.

Corollaire II. — Considérons le plan bitangent passant par la ligne Oy, et cherchons la nature de la section. Soit P un point de cette section :

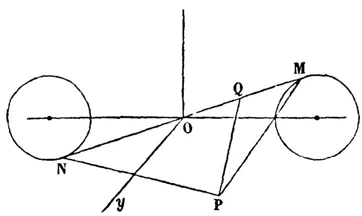
$$y = \mathrm{PQ},$$

$$2ay = \frac{2a}{\overline{\mathrm{MN}}}\mathrm{MN}.\mathrm{PQ} = \frac{4a}{\overline{\mathrm{MN}}}\,\text{surface}\,\mathrm{PMN} = \frac{2a}{\overline{\mathrm{MN}}}\,\mathrm{NP}.\mathrm{PM}\sin\mathrm{NPM}.$$

D'ailleurs $2ay$ est égal, d'après le théorème I, à NP.PM. On a donc

$$\sin \mathrm{NPM} = \frac{\overline{\mathrm{MN}}}{2a} = \text{constante}.$$

Ainsi le lieu du point P se compose de deux cercles passant par les points M, N et de rayon a.



3. En général, tout plan sécant coupera les deux sphères opposées suivant deux cercles (réels ou imaginaires), et le plan méridien de ces deux sphères suivant une droite; pour tout point de la section, y sera proportionnel à la distance à cette droite. Donc :

Théorème II. — *Les sections du tore sont telles, que le produit des tangentes menées d'un point quelconque à deux cercles est proportionnel à la distance de ce point à une certaine droite.*

On trouvera une infinité de cercles en prenant deux sphères opposées quelconques; l'un de ces cercles pourra se réduire à un point; le lieu des centres des cercles sera l'ellipse projection de la circonférence, lieu des centres des sphères inscrites.

Théorème III. — *Si l'on désigne par t, t', t'', les distances d'un point quelconque du tore à trois sphères inscrites ayant pour distances des centres c, c', c'', on aura*

$$ct + c't' + c''t'' = 0.$$

La démonstration est bien facile : soient deux sphères opposées

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0,$$

$$(x + a)^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0.$$

L'équation d'une sphère inscrite quelconque sera

$$(x - a\cos\alpha)^2 + (y - a\sin\alpha)^2 + z^2 - b^2 = 0.$$

Donc si t, t', T désignent les tangentes menées d'un point du tore, on aura

$$t^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2 - b^2,$$
$$t'^2 = (x + a)^2 + y^2 + z^2 - b^2,$$
$$T^2 = (x - a\cos\alpha)^2 + (y - a\sin\alpha)^2 + z^2 - b^2.$$

Donc

$$4ax = t'^2 - t^2;$$

d'ailleurs,

$$tt' = 2ay,$$

donc, éliminant x et y, on trouve

$$T^2 = \left(t\cos\frac{\alpha}{2} + t'\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \pm T = t\cos\frac{\alpha}{2} + t'\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Cette relation trouvée, le théorème se déduit aisément. On peut, au reste, l'obtenir géométriquement.

4. Voyons maintenant les conséquences relatives à une section quelconque.

Soient trois sphères inscrites prises comme on voudra. Ces trois sphères sont coupées suivant le plan sécant par trois cercles qui, pour tout point de la section, peuvent remplacer les trois sphères. Au reste, ces trois cercles sont doublement tangents à la section. Donc :

THÉORÈME IV. — *Toute section du tore est telle, que, si on lui mène trois cercles doublement tangents, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la section aux circonférences de ces trois cercles.*

Soient a, a', a'', les trois distances des centres des cercles pris deux à deux. Si h, h', h'' désignent les distances de ces trois centres aux centres des sphères inscrites respectives, on trouve

$$\sqrt{a^2+(h'-h'')^2}\,t+\sqrt{a'^2+(h-h'')^2}\,t'$$
$$+\sqrt{a''^2+(h-h')^2}\,t=0.$$

Comme vérification, si l'on fait $h=h'=h''$, on doit trouver un parallèle, et, en effet, on obtient alors la relation

$$at+a't'+a''t''=0$$

qui est vérifiée.

Étant donnée une section du tore, on peut toujours trouver quatre sphères inscrites (réelles ou imaginaires) qui lui soient tangentes. Prenons trois quelconques de ces sphères. Alors les tangentes aux sphères deviendront pour tout point de la section des distances aux points de contact. Deux des sphères seront tangentes d'un côté, l'autre sera tangente de l'autre côté du plan, donc on devra faire

$$h'=h''=b,\quad h=-b,$$

et l'équation précédente deviendra

$$ar+\sqrt{a'^2+b^2}\,r'+\sqrt{a''^2+b^2}\,r''=0.$$

Ce qui démontre :

Théorème V. — *Toute section plane du tore a quatre foyers tels, qu'il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point de la courbe à trois quelconques de ces quatre foyers.*

Ces quatre foyers sont placés symétriquement par rapport à l'axe de la section ; ils sont donc sur un cercle.

5. Pour toute section verticale, les quatre sphères tangentes auront leurs points de contact sur l'axe horizontal de la courbe. Considérons, en particulier, l'ellipse de Cassini ; pour que les quatre foyers soient réels, il faut poser

$$b = a \sin\varphi;$$

on trouve

$$\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{y^2+(x-a)^2}-\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{y^2+(x+a)^2}$$
$$=\sqrt{y^2+(x-a\cos\varphi)^2}.$$

En élevant au carré, on obtient effectivement

$$\sqrt{y^2+(x-a)^2}\sqrt{y^2+(x+a)^2}=a^2\sin\varphi,$$

donc :

Théorème VI. — *Toute cassinoïde jouit de cette propriété, que si l'on adjoint à ses deux foyers un certain point pris sur l'axe focal, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la courbe aux trois points.*

Si on rapproche les résultats qui précèdent de ceux qui ont été trouvés par M. Garlin, t. XIII, p. 415, on voit que la courbe, lieu des points d'où l'on voit une ellipse sous un angle constant, a quatre foyers sur le grand axe de l'ellipse.

6. Les sections du tore sont des courbes satisfaisant à l'équation générale

$$r=\mu r'+\nu r'';$$

mais μ et ν sont liés par la relation

$$\mu^2 - \nu^2 = \frac{a'^2 - a''^2}{a^2},$$

a, a', a'' étant les côtés du triangle des trois foyers. Transformons ces courbes par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle un quelconque des trois foyers. Nous trouverons, par exemple, en adoptant le foyer r,

$$\mu_1 r'_1 + \nu_1 r''_1 = 1$$

pour équation de la courbe réciproque. Donc :

THÉORÈME VII. — *Les sections planes du tore peuvent être regardées de quatre manières différentes, comme les courbes réciproques des ovales de Descartes* (*).

Et comme les sections du tore ont quatre foyers sur un cercle, on arrive à cette conséquence, signalée par M. Chasles, que les ovales de Descartes ont trois foyers en ligne droite.

Si l'on considère, en particulier, l'ellipse de Cassini, on voit que (théorème VII) toutes les ovales de Descartes peuvent être considérées comme les réciproques des ellipses de Cassini. Il suffit de prendre pour pôle de transformation un des quatre foyers de l'ellipse de Cassini.

7. Considérons les sections du tore par les plans tangents. Alors il n'y aura plus quatre foyers; deux d'entre eux viendront coïncider au point de contact du plan tangent. L'équation de la courbe sera alors

$$ar + \sqrt{a'^2 + b^2}\,(r' + r'') = 0,$$

car on aura

$$a' = a''.$$

Alors, en prenant pour pôle de transformation le point de

(*) M. Mannheim est parvenu de son côté au même théorème (voir *Journal de l'École Polytechnique*, XL^e cahier, p. 74). M. Darboux nous avait communiqué son travail avant la publication de ce XL^e cahier. P.

contact du plan tangent, la courbe réciproque sera une conique. Ainsi :

THÉORÈME VIII. — *Toutes les courbes de section du tore par leur plan tangent peuvent être considérées comme les courbes réciproques d'une conique, le pôle de transformation étant pris au point de contact du plan tangent.*

En particulier, la section faite par le plan tangent parallèle à l'axe sera la réciproque d'une hyperbole qu'il est facile de construire, le pôle étant au centre.

Mais si on prend pour pôles de transformations les deux autres foyers de la section donnée par le plan tangent, on aura des ovales dont deux foyers coïncideront, c'est-à-dire des limaçons de Pascal.

Note A.

Nous avons vu que les sections du tore sont des cas particuliers des courbes contenues dans l'équation générale

$$r = \mu r' + \nu r''.$$

Il semblerait, d'après cela, que les propriétés que nous avons trouvées pour les sections du tore ne doivent pas s'étendre aux courbes les plus générales ; mais on démontre facilement qu'en transformant les courbes contenues dans l'équation précédente par rayons vecteurs réciproques, l'équation garde la même forme, et on peut établir entre μ et ν la relation qui caractérise les sections du tore. Ces sections ont quatre foyers sur un cercle ; donc, toutes les courbes comprises dans l'équation

$$r = \mu r' + \nu r''$$

ont un autre foyer placé sur le cercle des trois foyers donnés ; en un mot, toutes les propriétés que nous avons données peuvent s'étendre aux courbes les plus générales.

Note B.

Si l'on prend pour coordonnées les tangentes à trois sphères égales, le tore a une équation de la forme.

$$at + a't' + a''t'' = 0.$$

Supposons que l'on prenne trois sphères quelconques égales ou inégales, trois coefficients quelconques λ, μ, ν, on peut se demander ce que représentera l'équation

$$\lambda t + \mu t' + \nu t'' = 0.$$

D'abord on voit *à priori* qu'elle contiendra une infinité de cercles

$$t = \alpha t',$$
$$(\lambda\alpha + \mu)\, t' + \nu t'' = 0.$$

Au reste, remarquons que la transformation par rayons vecteurs réciproques n'altérera pas en général la forme de cette équation. Faisons la transformation en prenant pour pôle le point de rencontre des trois sphères

$$t = 0, \quad t' = 0, \quad t'' = 0;$$

l'équation deviendra

$$\lambda \sqrt{P} + \lambda' \sqrt{P'} + \lambda'' \sqrt{P''} = 0,$$

P, P', P'' étant trois fonctions du premier degré des coordonnées. On aura donc un cône du second degré. Ainsi, l'équation représente la surface réciproque d'un cône. Cette surface est très-intéressante; elle comprend comme cas particuliers le tore, la cyclide (*), et peut être définie comme le lieu d'un cercle qui passe par deux points donnés et s'appuie sur un cercle donné. Outre le cercle générateur, cette surface admet deux séries de cercles cor-

(*) Surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données (DUPIN, *Applications de Géométrie*, p. 200, et MANNHEIM, *Nouvelles Annales*, p. 67; 1860). P.

respondant aux sections circulaires du cône, et quand ces deux séries de cercles se réunissent, on a le tore ou la cyclide.

Note C.

Toutes les propriétés que nous avons données pour les sections du tore s'étendent naturellement aux sections de la cyclide. Toutes les courbes de sections planes ont quatre foyers comme les courbes du tore.

J'attirerai l'attention sur la propriété suivante. Supposons que l'on transforme le tore par rayons vecteurs réciproques en prenant le pôle de transformation à l'intérieur de la surface. Alors il y aura deux sphères inscrites, passant par le pôle, qui se transformeront en plans. La cyclide pourra être considérée comme l'enveloppe des sphères tangentes à deux plans et à une troisième sphère; mais les deux plans tangents aux sphères inscrites passant au pôle coupaient le tore suivant deux courbes ayant un foyer au pôle de transformation. Par suite, les réciproques de ces courbes seront des ovales de Descartes. On voit donc que :

Lorsque la cyclide pourra être considérée comme l'enveloppe des sphères tangentes à une sphère et à deux plans, il y aura deux sections planes parallèles à ces deux plans qui donneront des ovales de Descartes.