

FAURE

**Sur l'équation du troisième degré et sur une
équation du dixième degré de Jacobi**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 3
(1864), p. 116-121

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__116_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ
ET SUR UNE ÉQUATION DU DIXIÈME DEGRÉ DE JACOBI;**

PAR M. FAURE.

L'équation générale

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

s'identifie avec

(1) $\alpha_1(x - \alpha)^3 + \beta_1(x - \beta)^3 = 0,$

au moyen des valeurs

$$\alpha_1 = \frac{a\beta + b}{\beta - \alpha}, \quad \beta_1 = \frac{-a\alpha - b}{\beta - \alpha},$$

et prenant pour α et β les racines de l'équation du second degré

$$(2) \quad Ay^2 + 2By + C = 0,$$

où j'ai posé

$$A = ac - b^2, \quad 2B = ad - bc, \quad C = bd - c^2.$$

Or, l'équation (1) donne, en désignant par ρ l'une des racines cubiques de l'unité,

$$\frac{x - \alpha}{x - \beta} = \rho \sqrt[3]{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}} = \rho \sqrt[3]{\frac{a\alpha + b}{a\beta + b}},$$

et l'on peut considérer l'équation donnée comme résolue. Si l'on veut donner à cette valeur la forme ordinaire, on en déduit d'abord

$$(3) \quad x = \frac{\rho\beta(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - \alpha(a\beta + b)^{\frac{1}{3}}}{\rho(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - (a\beta + b)^{\frac{1}{3}}};$$

mais on peut écrire

$$ax = -b + \frac{\rho(a\beta + b)(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - (a\alpha + b)(a\beta + b)^{\frac{1}{3}}}{\rho(a\alpha + b)^{\frac{1}{3}} - (a\beta + b)^{\frac{1}{3}}},$$

la division se fait exactement, on a de plus :

$$(a\alpha + b)(a\beta + b) = -A,$$

donc

$$x = \frac{1}{a} \left\{ -b + \rho[A(a\alpha + b)]^{\frac{1}{3}} + \rho^2[A(a\beta + b)]^{\frac{1}{3}} \right\},$$

formule qui donne les trois racines puisque ρ indique l'une quelconque des racines cubiques de l'unité.

M. Le Besgue, dans un article inséré dans le tome VIII, p. 219, arrive aussi à cette formule, mais, comme il le dit, au moyen de réductions assez longues. La méthode précédente ne laisse rien à désirer sous le rapport de la simplicité.

La résolvante (2) et l'équation donnée ont entre elles des relations très-remarquables, indiquées aussi par M. Le Besgue.

1° Si $A = B = C = 0$, auquel cas la résolvante devient identique, l'équation donnée a ses trois racines égales à $-\frac{b}{a}$.

2° Si $AC - B^2 = 0$, auquel cas la résolvante a deux racines égales, l'équation admet la racine double $-\frac{B}{A}$ et la racine simple $-\frac{Ad}{Ca}$. Cela se voit en considérant l'équation (3).

3° Si $A = 0$, ou si $C = 0$, l'équation se réduit à une équation à deux termes. Elle se met en effet sous les deux formes

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ad - bc}{a} = 0,$$

$$\frac{ac - b^2}{c}x^3 + \frac{b^2}{c}\left(x + \frac{c}{b}\right)^3 = 0.$$

De là concluons que si la résolvante a une racine infinie ou une racine nulle, l'équation donnée se réduira à une équation à deux termes.

Que deviennent les racines de l'équation du troisième degré lorsque le coefficient a du premier terme est nul?

En faisant sur la formule qui exprime la valeur de x des transformations bien simples, on arrive à la rela-

tion (3) qui pour $a = 0$ donne

$$x = \frac{\rho\beta b^{\frac{1}{3}} - \alpha b^{\frac{1}{3}}}{\rho b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} = \frac{\rho\beta - \alpha}{\rho - 1};$$

pour $\rho = 1$ elle donne l'infini, mais si l'on prend pour ρ des valeurs imaginaires, on trouve

$$x = \frac{-3c \pm \sqrt{4bd - 3c^2} \sqrt{-3}}{6b}.$$

Cette solution exprime les racines de l'équation du second degré

$$3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

Remarque I. — Si l'on applique cette méthode à une équation de degré plus élevé, par exemple à celle du cinquième degré, on voit que l'équation générale

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0$$

s'identifie avec l'équation (1) moyennant les relations

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Les valeurs de α et β sont toujours données par l'équation (2), et l'on trouve

$$x = \frac{1}{a} \left(-b - (b^2 - ac)^{\frac{1}{5}} \left\{ (ax + b)^{\frac{3}{5}} + (a\beta + b)^{\frac{3}{5}} \right. \right. \\ \left. \left. + (b^2 - ac)^{\frac{1}{5}} \left[(ax + b)^{\frac{1}{5}} + (a\beta + b)^{\frac{1}{5}} \right] \right\} \right).$$

Remarque II. — La solution précédente de l'équation du troisième degré indique immédiatement une relation entre deux des racines de l'équation. Soit x la racine qui correspond à $\rho = 1$, x_1 celle qui correspond à une des

valeurs imaginaires de cette quantité, on a :

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = \sqrt[3]{\frac{a\alpha+b}{a\beta+b}}, \quad \frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta} = \rho \sqrt[3]{\frac{a\alpha+b}{a\beta+b}};$$

donc

$$\frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta} = \rho \frac{x-\alpha}{x-\beta}.$$

Remplaçant ρ, α, β par leurs valeurs, on a une relation que l'on trouve d'habitude assez péniblement, même en supposant l'équation du troisième degré débarrassée de son second terme. (Voyez l'article de M. Lobatto inséré dans le tome IX du *Journal de M. Liouville*, ou l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.)

Résolution de l'équation du dixième degré de Jacobi.

Soit l'équation

$$y^{10} - 5qy^8 - 5q^4y^2 + q^5 = py^5;$$

je la mets sous la forme

$$(1) \quad y^5 + \frac{q^5}{y^5} - 5q \left(y^3 + \frac{q^3}{y^3} \right) = p,$$

puis posant

$$(2) \quad y + \frac{q}{y} = x,$$

d'où

$$y^3 + \frac{q^3}{y^3} = x^3 - 3qx, \quad y^5 + \frac{q^5}{y^5} = x^5 - 5qx^3 + 5q^3x,$$

l'équation (1) devient

$$x^5 - 10qx^3 + 20q^2x = p.$$

Pour résoudre celle-ci, on pose

$$2q = m.n, \quad p = m^5 + n^5:$$

cela donne

$$m^5 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2}, \quad n^5 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2},$$

et l'on a

$$x^5 - 5mnx^3 + 5m^2n^2x = m^5 + n^5,$$

laquelle est vérifiée par

$$x = m + n.$$

Or l'on a, d'après l'équation (2),

$$2y = x \pm \sqrt{x^2 - 4q};$$

donc

$$2y = m + n \pm \sqrt{m^2 + n^2},$$

car

$$2mn = 4q.$$

Remplaçant m et n par leurs valeurs, on a la solution de Jacobi :

$$x = \left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2} \right)^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2} \right)^{\frac{1}{5}} \\ \pm \sqrt{\left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2} \right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 128q^5}}{2} \right)^{\frac{2}{5}}}.$$