NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ALFRED BRISSAUD

Question d'examen - École polytechnique (1862)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 9-10

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__9_0>

QUESTION D'EXAMEN — ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1862);

SOLUTION DE M. ALFRED BRISSAUD,
Élève en spéciales (institution Loriol).

Conditions de convergence et somme des termes de la série :

$$1.2.3\ldots p x^p + 2.3\ldots p(p+1)x^{p+1} + 3.4.5\ldots(p+2)x^{p+2} + \ldots.$$

1° Le rapport de deux termes consécutifs est en général

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)(m+p+1)}{m(m+1)\ldots(m+p-1)(m+p)}x = \frac{m+p+1}{m}x;$$

sa limite est x; donc la condition de convergence est $x < 1$. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, $x < 1$.

2° Pour $p = 1$, la série convergente considérée devient

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots.$$

Désignons sa somme par xy, on aura

$$y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots.$$

Or, $1 + 2x + 3x^2 + \ldots$ est la dérivée de

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

donc y est la dérivée première de $\frac{1}{1-x}$.

En prenant les p dérivées successives de $\frac{1}{1-x}$, on trouve

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$
$$= \textit{dérivée première de } \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-2},$$

$$1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + \dots$$

$$= \textit{dérivée seconde} \text{ de } \frac{1}{1-x} = 1.2(1-x)^{-3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1.2.3\dots p + 2.3\dots(p+1)x + \dots = 1.2\dots p(1-x)^{-(p+1)}.$$

Multipliant les deux membres de cette dernière égalité par x^p, le premier membre devient la série considérée, dont la somme est

$$\frac{1.2.3\dots px^p}{(1-x)^{p+1}}.$$