

ALFRED BRISSAUD

**Question d'examen - École
polytechnique (1862)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 9-10

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_9_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN — ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1862);
SOLUTION DE M. ALFRED BRISSAUD,

 Élève en spéciales (institution Lorient).

*Conditions de convergence et somme des termes
de la série :*

$$1.2.3\dots px^p + 2.3\dots p(p+1)x^{p+1} \\ + 3.4.5\dots (p+2).x^{p+2} + \dots$$

1° Le rapport de deux termes consécutifs est en général

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)(m+p+1)}{m(m+1)\dots(m+p-1)(m+p)} x = \frac{m+p+1}{m} x;$$

sa limite est x ; donc la condition de convergence est $x < 1$. Nous supposons, dans ce qui va suivre, $x < 1$.

2° Pour $p = 1$, la série convergente considérée devient

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

Désignons sa somme par xy , on aura

$$y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Or, $1 + 2x + 3x^2 + \dots$ est la dérivée de

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

donc y est la dérivée première de $\frac{1}{1-x}$.

En prenant les p dérivées successives de $\frac{1}{1-x}$, on trouve

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \\ = \text{dérivée première de } \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-2},$$

(10)

$$1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + \dots$$

$$= \text{dérivée seconde de } \frac{1}{1-x} = 1.2(1-x)^{-3},$$

.....

$$1.2.3\dots p + 2.3\dots(p+1)x + \dots = 1.2\dots p(1-x)^{-(p+1)}.$$

Multipliant les deux membres de cette dernière égalité par x^p , le premier membre devient la série considérée, dont la somme est

$$\frac{1.2.3\dots px^p}{(1-x)^{p+1}}.$$
