

L. CLAUDE

**Propriétés relatives à la somme et à la
différence de deux carrés**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 88-92

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_88_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**PROPRIÉTÉS RELATIVES A LA SOMME ET A LA DIFFÉRENCE
DE DEUX CARRÉS ;**

PAR LE R. P. L. CLAUDE,
De la Compagnie de Jésus (*).

1. *Si un nombre entier n est la somme de deux carrés différents, le nombre $2^m.n$ le sera pareillement.*

Soit $n = a^2 + b^2$; nous aurons

$$2^m.n = 2^m a^2 + 2^m b^2.$$

Si m est pair, chacun des termes du second membre est un carré; si m est impair et égal à $2k + 1$, nous aurons

$$2^{2k+1}(a^2 + b^2) = 2^{2k}.2(a^2 + b^2) = 2^{2k}(a + b)^2 + 2^{2k}(a - b)^2.$$

Donc . . .

2. *Réciproquement, si un nombre $2^m.n$ est la somme*

(*) Plusieurs des propriétés dont il s'agit dans l'article que le R. P. L. Claude nous a adressé ayant déjà été démontrées dans les *Nouvelles Annales*, nous ne publions qu'un extrait de cet article.

de deux carrés différents, le nombre n le sera pareillement.

Soit $2^m \cdot n = a^2 + b^2$; nous aurons

$$2^{m-1} \cdot n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Or, $a^2 + b^2$ étant un nombre pair, a et b ont un même ordre de parité, c'est-à-dire sont tous deux pairs ou tous deux impairs, donc $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$ sont des nombres entiers. Donc...

3. *Tout nombre impair, à l'exception de l'unité, est la différence de deux carrés,*

Nous avons identiquement

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

et ab peut représenter un nombre impair quelconque, puisque dans le cas où le nombre proposé serait premier, ou le carré d'un nombre premier, nous n'avons qu'à faire $b = 1$. Les nombres a et b étant impairs, $a + b$ et $a - b$ seront des nombres pairs, et par suite $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$ sont des nombres entiers. Donc...

4. *Tout multiple de 4, à l'exception de 4 lui-même, est la différence de deux carrés.*

Soit $4ab$ le nombre proposé; nous aurons identiquement

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2.$$

Donc...

5. *Tout carré, à l'exception de 1 et de 4, est la différence de deux carrés.*

En effet, un carré quelconque est un nombre impair, ou un multiple de quatre.

6. *Aucun nombre simplement pair ne peut être la différence de deux carrés.*

Soit, en effet,

$$2ab = (x^2 - y^2) = (x + y)(x - y),$$

le produit de ces deux facteurs étant simplement pair, l'un des deux facteurs devra être pair et l'autre impair, ce qui est impossible, car la première propriété ne peut avoir lieu sans que x et y aient un même ordre de parité, tandis que la seconde exige que x et y aient un ordre de parité différent. Donc x et y ne sauraient être des nombres entiers. Donc. . . .

7. *Tout nombre qui est la différence de deux carrés jouit de cette propriété autant de fois que l'on peut former de combinaisons différentes avec le nombre des facteurs premiers qu'il renferme, 2 à 2, 3 à 3, . . . , n à n .*

Soient p_1, p_2, \dots, p_n les facteurs premiers du nombre N , de manière que nous ayons

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

nous pourrions représenter par a l'une quelconque des combinaisons ci-dessus désignées; a aura pour chacune d'elles une valeur différente. Mais, à une valeur différente de a correspond une valeur différente de b , et par suite des valeurs différentes de $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$; donc. . . .

Note du Rédacteur. — Lorsque N est un nombre impair, l'équation

$$(x + y)(x - y) = N$$

admet autant de solutions entières et positives que N a

de diviseurs moindres que sa racine carrée, en comprenant l'unité parmi ces diviseurs. Car, à chaque solution entière et positive de l'équation

$$(x + y)(x - y) = N,$$

correspond un diviseur $x - y$ de N , et moindre que \sqrt{N} , puisque $x - y < x + y$. Et, inversement à chaque diviseur $x - y$ de N moindre que \sqrt{N} , correspond une solution entière et positive de l'équation considérée.

Il en résulte que si la décomposition du nombre N en ses facteurs premiers donne

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

et qu'en outre N ne soit pas un carré, le nombre des solutions dont il s'agit est

$$\frac{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)}{2}.$$

Si le nombre impair N était un carré, le nombre des solutions serait

$$\frac{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1) - 1}{2}.$$

Quand N est pair, la décomposition de N en facteurs premiers donne

$$N = 2^{\beta} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

L'un des deux facteurs $x + y$, $x - y$ étant nécessairement un nombre pair, il faudra, pour que x et y soient entiers, que l'autre facteur soit aussi un nombre pair. Cette condition est d'ailleurs suffisante pour que x et y soient entiers. Ainsi, le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$(x + y)(x - y) = N = 2^{\beta} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

sera égal au nombre des décompositions de N en deux facteurs entiers $(x + y)$, $(x - y)$, inégaux et divisibles, chacun, par deux.

Le nombre total des diviseurs de N , en y comprenant N et 1, est

$$(\delta + 1)(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$$

Il s'ensuit que, si N n'est pas un carré, le nombre des décompositions de N en deux facteurs entiers est

$$\frac{(\delta + 1)(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)}{2}.$$

Mais, pour obtenir les solutions cherchées, il faut écarter toutes les décompositions dans lesquelles l'un des deux facteurs entiers est impair. Et il est clair que le nombre de ces dernières décompositions est précisément égal au nombre des diviseurs impairs de N , c'est-à-dire égal à

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$$

D'où nous concluons que le nombre des solutions cherchées est

$$\frac{(\delta + 1)(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)}{2} - (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1),$$

ou

$$\frac{(\delta - 1)(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)}{2}.$$

Lorsque $2^{\delta} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ est un carré, le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$(x + y)(x - y) = 2^{\delta} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

est

$$\frac{(\delta - 1)(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1) - 1}{2},$$

comme il est facile de s'en assurer par ce qui précède.

G.