NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-CH. DUPAIN

Résolution d'une équation transcendante

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 82-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__82_0>

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION TRANSCENDANTE ;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Étant données la corde $2a$ et la surface S d'un segment circulaire plus petit que la moitié du cercle, trouver l'arc $2y$.

En appelant r le rayon, on trouve successivement et sans difficulté

$$a = r\sin y,$$

$$S = \frac{1}{2} r^2 (2y - \sin 2y),$$

$$(1) \qquad 2.S.\sin^2 y + a^2 \sin 2y - 2a^2 y = 0.$$

Je représente par $F(y)$ le premier membre de l'équation (1), et j'obtiens les deux dérivées

$$F'(y) = 2.S.\sin 2y + 2a^2 \cos 2y - 2a^2,$$
$$F''(y) = 4.S.\cos 2y - 4a^2 \sin 2y.$$

Zéro est une racine de l'équation (1), et cette racine peut s'appeler double, parce qu'elle vérifie l'équation

$$F'(y) = 0.$$

L'équation (1) n'a pas de racine négative ; en effet, $F(-y)$ peut s'écrire

$$2.S.\sin^2 y + a^2(2y - \sin 2y),$$

et reste positif pour toute valeur positive de y.

Si nous désignons par u le plus petit arc positif ayant pour tangente $\frac{S}{a^2}$, la dérivée $F'(y)$ devient

$$2a^2 \sin 2y (\tan u - \tan y);$$

elle est positive quand y varie de o à u, et négative quand y varie de u à π.

La fonction $F(y)$ est nulle pour $y = 0$; elle est croissante, et par conséquent positive, quand y varie de o à u, et elle décroît ensuite; lorsque y atteint la valeur $\frac{\pi}{2}$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2S - \pi a^2,$$

et comme le segment est plus petit qu'un demi-cercle, on a

$$S < \pi\frac{a^2}{2}, \quad \text{et} \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

L'équation (1) a donc une racine comprise entre u et $\frac{\pi}{2}$.

La fonction $F(y)$ reste négative quand y varie de $\frac{\pi}{2}$ à π et il est inutile d'aller plus loin, car

$$F(y) < 2S + a^2 - 2a^2y < \pi a^2 + a^2 - 2a^2y,$$

et ce dernier polynôme est constamment négatif pour des valeurs de y supérieures à $\frac{1+\pi}{2}$; il en est de même à fortiori de $F(y)$.

Afin d'arriver à une détermination numérique, je fais une hypothèse particulière, par exemple, $S = a^2$; l'équation (1) devient alors

$$(2) \qquad y = \sin^2 y + \frac{\sin 2y}{2},$$

ou bien

$$(3) \qquad F(y) = \sin^2 y + \frac{\sin 2y}{2} - y,$$

et alors

$$F'(y) = \sin 2y + \cos 2y - 1,$$
$$F''(y) = 2\cos 2y - 2\sin 2y.$$

J'applique la méthode de Newton rectifiée par Fourier, et j'obtiens deux limites plus resserrées

$$\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{F'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0,89270,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1,28540,$$

que je pourrais resserrer encore davantage.

On pourrait aussi dans l'équation (2) substituer $\frac{\pi}{4} + z$ à y, ce qui donne en développant par la formule de Taylor et en faisant quelques réductions

$$\frac{\pi}{4} + z = 1 + z - z^2 - \frac{z^3}{3}\left(2 - z - \frac{2}{5}z^2\right) - \frac{2}{45}z^6 \ldots,$$

or $z < \frac{\pi}{4}$, on peut donc en négligeant z^7 écrire que

$z^2 < 1 - \frac{\pi}{4}$, $z < 0,46$, $y < 1,24$; en prenant pour y la valeur $1,24$ et en la transformant en degrés, on trouve environ 71°, mais comme $y < 1,24$, il est prudent de n'essayer que 70°. Si j'adopte cette valeur, les deux membres de l'équation (2) deviennent

$$1,2217, \qquad 1,2044;$$

j'essaye alors 69°, et les deux membres de l'équation (2) deviennent

$$1,2043, \qquad 1,2061.$$

La véritable valeur est donc comprise entre 69° et 70°;

après quelques fausses positions on trouve

pour $69^\circ 5' 56''$..... 1,206003 et 1,206006,
pour $69^\circ 5' 57''$..... 1,206008 et 1,206005.

Le résultat est donc à une demi-seconde près $69^\circ 5' 56'' \frac{1}{2}$.

Il est commode d'employer dans ces calculs, outre les logarithmes ordinaires, des tables de lignes trigonométriques naturelles, de carrés, de degrés exprimés en parties du rayon. Ces divers éléments se trouvent réunis à beaucoup d'autres dans un petit volume intitulé : *Collectio tabularum ad calculos breviter subducendos, auctore* J. Dupuis, c'est-à-dire : *Recueil de tables propres à abréger les calculs.*