

V.-A. LE BESGUE

**Sur l'impossibilité de quelques
équations indéterminées**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 68-77

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_68_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE QUELQUES ÉQUATIONS
INDÉTERMINÉES;**

PAR M. V.-A. LE BESGUE,
Correspondant de l'Institut.

I.

1. Il est établi dans cette Note :

1° Que le nombre $m^4 + 14m^2n^2 + n^4$ ne saurait être carré si l'on suppose m pair et n impair.

2° Comme conséquence, que $x^2 + 4y^2$, $x^2 + y^2$ ne peuvent être simultanément des carrés, x est supposé impair et y pair.

3° Que le produit $p(p+q)(p+2q)(p+3q)$ ne saurait être un carré. Le cas principal est celui-ci : quatre carrés ne peuvent être en progression arithmétique.

4° Le nombre $m^4 + 14m^2n^2 + n^4$ ne peut être carré, même en supposant m et n impairs.

5° Le nombre $m^4 - m^2n^2 + n^4$ ne saurait être un carré.

Il va sans dire qu'on laisse de côté en 1° les solutions $m = 0, n = 1$; en 4° la solution $m = n = 1$; en 5° les solutions $m = 0, n = 1$; $n = 0, m = 1$.

La démonstration s'appuie sur la résolution de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

où x, y, z sont premiers deux à deux. L'inconnue paire du premier membre est nécessairement divisible par 4,

de sorte qu'en mettant l'équation sous la forme

$$\left(\frac{y}{z}\right)^2 = \frac{z^2 - x^2}{4} = \frac{z+x}{2} \cdot \frac{z-x}{2} = p^2 q^2,$$

p et q sont premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair, et l'on a nécessairement

$$y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2, \quad x = p^2 - q^2.$$

On établirait de même qu'on peut prendre

$$y = \frac{r^2 - s^2}{2}, \quad x = rs, \quad z = \frac{r^2 + s^2}{2},$$

r et s étant des nombres impairs premiers entre eux. On passerait de ces formules aux précédentes en posant

$$r + s = 2p, \quad r - s = 2q,$$

d'où

$$r = p + q, \quad s = p - q.$$

II.

THÉORÈME. — *L'équation*

$$r^2 = m^4 + 14m^2n^2 + n^4,$$

où m et n sont des nombres premiers entre eux, m étant pair et n impair, est impossible.

Démonstration. — On posera $m = 2^a p$, le nombre p étant impair, et on reconnaîtra 1° que l'équation est impossible pour $a = 1$, et 2° que pour $a > 1$ on tombe forcément sur une équation

$$r'^2 = m'^4 + 14m'^2n'^2 + n'^4,$$

où l'on a $m' = 2p'$, et p' impair, ce qui est impossible par 1°. De sorte que l'impossibilité aura encore lieu pour $a > 1$.

(70)

1^o On a

$$\begin{aligned} r^2 &= 2^{2a} p^4 + 2^{2a+1} \gamma p^2 n^2 + n^4 = (2^{2a} p^2 + \gamma n^2)^2 - 48 n^4, \\ (2^{2a} p^2 + \gamma n^2 + r)(2^{2a} p^2 + \gamma n^2 - r) &= 48 n^4 = 3 \cdot 2^4 n^4. \end{aligned}$$

Or, des deux facteurs

$$2^{2a} p^2 + \gamma n^2 + r, \quad 2^{2a} p^2 + \gamma n^2 - r,$$

un seul peut être divisible par 3; car autrement, n serait divisible par 3, les nombres

$$2^{2a} p^2 + r, \quad 2^{2a} p^2 - r$$

le seraient, par suite p et r , ce qui n'est pas.

On prouve de même qu'aucun facteur de n n'est commun aux nombres

$$2^{2a} p^2 + \gamma n^2 + r, \quad 2^{2a} p^2 + \gamma n^2 - r.$$

Comme ces deux nombres sont pairs et que leur différence est $2r$, l'un sera divisible par 2 et l'autre par 8; on aura les décompositions suivantes:

$$\begin{aligned} 2^{2a} p^2 + \gamma n^2 \pm r &= 2r^4, &= 6r^4, & n = rs, \\ 2^{2a} p^2 + \gamma n^2 \mp r &= 24s^4, &= 8s^4, \end{aligned}$$

on suppose r et s premiers entre eux.

La première décomposition donne, par addition,

$$2^{2a} p^2 = r^4 - \gamma r^2 s^2 + 12s^4 = 8k + 6,$$

équation impossible.

La deuxième décomposition donne, par addition,

$$\begin{aligned} 2^{2a} p^2 &= 3r^4 - \gamma r^2 s^2 + 4s^4 = (3r^2 - 4s^2)(r^2 - s^2) \\ &= (4s^2 - 3r^2)(s^2 - r^2). \end{aligned}$$

Comme r et s sont impairs, $r^2 - s^2$ est divisible par 8; donc l'équation est impossible pour $a = 1$.

2^o Pour $a > 1$, comme les facteurs $4s^2 - 3r^2$, $s^2 - r^2$ donnent

$$4s^2 - 3r^2 - 3(s^2 - r^2) = s^2,$$

(71)

on voit qu'ils sont premiers entre eux : chacun d'eux doit donc être carré. Or

$$3r^2 - 4s^2 = 4k - 1$$

ne saurait être carré; il faudra donc prendre

$$2^{2a}p^2 = (s^2 - r^2)(4s^2 - 3r^2).$$

Or, pour rendre carré $s^2 - r^2$, s et r étant impairs, il faut faire

$$s = t^2 + u^2, \quad r = t^2 - u^2,$$

d'où

$$s^2 - r^2 = 4t^2u^2;$$

de plus

$$\begin{aligned} 4s^2 - 3r^2 &= 4(t^4 + 2t^2u^2 + u^4) - 3(t^4 - 2t^2u^2 + u^4) \\ &= t^4 + 14t^2u^2 + u^4; \end{aligned}$$

il vient donc

$$2^{2(a-1)}p^2 = t^2u^2(t^4 + 14t^2u^2 + u^4),$$

l'un des nombres t, u , étant pair et l'autre impair. Si t est pair, on a donc

$$t = 2^{a-1}v,$$

v impair.

En continuant de même, on aura à rendre carré

$$x^4 + 14x^2y^2 + y^4,$$

où x est pair et y impair, x n'étant pas divisible par 4; or cela a été prouvé impossible.

Corollaire. — On ne peut rendre simultanément carrés $x^2 + y^2$, $x^2 + 4y^2$, x étant impair et y pair; il faut poser

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn$$

pour avoir $x^2 + y^2$ carré; alors $x^2 + 4y^2$ devient

$$m^4 + 14m^2n^2 + n^4,$$

où l'une des inconnues m, n , est paire.

III.

L'équation

$$z^2 = x^4 + 14x^2y^2 + y^4$$

étant reconnue généralement impossible pour le cas de x pair, il sera facile de montrer l'impossibilité de l'équation

$$p(p+q)(p+2q)(p+3q) = r^2.$$

Il faut pour cela distinguer plusieurs cas, qui résultent des remarques suivantes

1° On peut supposer p et q premiers entre eux, car si p et q avaient le facteur commun θ , le premier membre serait divisible par θ^4 , et par suite r par θ^2 . On peut donc faire disparaître θ .

2° Deux facteurs consécutifs sont premiers entre eux, autrement p et q ne le seraient pas.

3° Le facteur commun à deux facteurs séparés par un troisième ne peut être que 2.

4° Le facteur commun à p et $p+3q$ ne peut être que 3.

5° Si deux facteurs sont pairs, ils ne sauraient être l'un et l'autre divisibles par 4. Autrement p et q seraient pairs.

6° Si p et $p+3q$ sont divisibles par 3, ils ne sauraient être tous deux divisibles par 9. Autrement p et q seraient tous deux divisibles par 3.

Il y a donc à considérer les six cas suivants :

1 ^{er} cas. p et q impairs,	p non multiple de 3.
2 ^e cas. p et q impairs,	p multiple de 3.
3 ^e cas. p pair, q impair,	p non multiple de 3.
4 ^e cas. p pair, q impair,	p multiple de 3.
5 ^e cas. p impair, q pair,	p multiple de 3.
6 ^e cas. p impair, q pair,	p non multiple de 3.

Dans le 1^{er} cas, il faut poser

$$p = r^2, \quad p + q = 2s^2, \quad p + 2q = t^2, \quad p + 3q = 2u^2,$$

de là

$$q = 2s^2 - r^2, \quad p + 2q = 4s^2 - r^2 = t^2,$$

ou

$$4s^2 = r^2 + t^2,$$

équation impossible, le deuxième membre n'étant pas divisible par 4.

Dans le 2^e cas, il faut poser

$$p = 3r^2, \quad p + q = 2s^2, \quad p + 2q = t^2, \quad p + 3q = 6u^2;$$

de là

$$q = 2u^2 - r^2, \quad p + q = 2s^2 = 2u^2 + 2r^2,$$

ou

$$s^2 = u^2 + r^2, \quad p + 2q = 4u^2 + r^2 = t^2.$$

Mais on a vu que, pour rendre carrés $u^2 + r^2$ et $4u^2 + r^2$, il faudrait rendre carré $m^2 + 14m^2n^2 + n^4$, ce qui est impossible.

Dans le 3^e cas, il faut poser

$$p = 2r^2, \quad p + q = s^2, \quad p + 2q = 2t^2, \quad p + 3q = u^2,$$

de là

$$q = t^2 - r^2, \quad p + q = t^2 + r^2 = s^2,$$

$$p + 3q = 3t^2 - r^2 = u^2.$$

Or $3t^2 = u^2 + r^2$ est impossible; r et u n'étant pas divisibles par 3, le deuxième membre ne saurait être divisible par 3 comme le premier.

Dans le 4^e cas, il faut poser

$$p = 6r^2, \quad p + q = s^2, \quad p + 2q = 2t^2, \quad p + 3q = 3u^2;$$

de là

$$q = u^2 - 2r^2, \quad p + q = u^2 + 4r^2 = s^2,$$

$$p + 2q = 2u^2 + 2r^2 = 2t^2$$

ou

$$u^2 + r^2 = t^2.$$

Or le système

$$u^2 + 4r^2 = s^2, \quad u^2 + r^2 = t^2$$

est impossible.

Dans le 5^e cas, il faut poser

$$p = 3r^2, \quad p + q = s^2, \quad p + 2q = t^2, \quad p + 3q = 3u^2,$$

les nombres r, s, t, u étant impairs.

On a

$$q = u^2 - r^2, \quad p + q = 2r^2 + u^2 = s^2,$$

équation impossible aussi bien que

$$p + 2q = r^2 + 2u^2 = t^2,$$

car il en résulterait un carré de forme $8k + 3$.

Dans le 6^e et dernier cas, chacun des nombres $p + q, p + 2q, p + 3q$ devra être un carré impair.

Soient x^2, y^2, z^2, t^2 ces carrés, on aura

$$t^2 - z^2 = z^2 - y^2 = y^2 - x^2.$$

Si l'on fait

$$t + z = 2u, \quad t - z = 2v,$$

$$y + x = 2r, \quad y - x = 2s,$$

l'équation

$$t^2 - z^2 = y^2 - x^2$$

deviendra

$$(1) \quad uv = rs;$$

et comme l'on a

$$t = u + v, \quad z = u - v, \quad y = r + s, \quad x = r - s,$$

l'équation

$$t^2 - z^2 = y^2 - x^2$$

deviendra

$$4uv = (u - v)^2 - (r + s)^2$$

ou

$$(2) \quad u^2 + v^2 - r^2 - s^2 - 8uv = 0.$$

Des deux nombres u, v , l'un est pair et l'autre impair, il en est de même de r et s ; on peut supposer r pair et v impair.

Si l'on pose

$$\frac{u}{r} = \frac{s}{v} = \lambda \quad \text{ou} \quad u = \lambda r, \quad s = \lambda v,$$

l'équation (2) deviendra

$$\lambda^2 (r^2 - v^2) - 8rv\lambda - (r^2 - v^2) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda (r^2 - v^2) = 4rv \pm \sqrt{r^4 + 14r^2v^2 + v^4}.$$

Pour avoir λ rationnel, il faudrait que

$$r^4 + 14r^2v^2 + v^4$$

fût un carré, ce qui est impossible, puisque r est pair.

N. B. — Voyez les *Commentationes Arithmeticae collectae*, Auspic. Acad. Petrop. edd. P.-H. Fuss et N. Fuss, 2 vol. Petrop. 1849. Dans le tome II, Mém. 77, Euler s'appuie sur l'impossibilité reconnue de trouver quatre carrés en progression arithmétique; il n'indique pas l'ouvrage où se trouve la démonstration, qui pourrait fort bien être plus simple que la précédente.

IV.

THÉORÈME. — L'équation

$$r^2 = m^4 + 14m^2n^2 + n^4$$

est impossible pour m et n impairs (premiers entre eux).

Démonstration. — Le second membre est divisible

par 16, parce que m^2 et n^2 ont la forme $8k + 1$; ainsi r est divisible par 4. L'équation mise sous la forme

$$(m^2 + 7n^2 + r)(m^2 + 7n^2 - r) = 48n^4 = 3 \cdot 16p^4 q^4,$$

en supposant $n = pq$, p et q premiers entre eux, n n'admet que la décomposition

$$m^2 + 7u^2 \pm r = 4p^4, \quad m^2 + 7u^2 \mp r = 12q^4,$$

d'où, par addition,

$$\begin{aligned} m^2 &= 2p^4 - 7p^2 q^2 + 6q^4 = (p^2 - 2q^2)(2p^2 - 3q^2) \\ &= (2q^2 - p^2)(3q^2 - 2p^2). \end{aligned}$$

Comme $p^2 - 2q^2$, et $2p^2 - 3q^2$ donnent

$$2(p^2 - 2q^2) - (2p^2 - 3q^2) = -q^2,$$

on voit que $p^2 - 2q^2$, $2p^2 - 3q^2$ sont premiers entre eux. D'ailleurs ces nombres de forme $8k - 1$ ne sauraient être carrés. Il faut prendre

$$m^2 = (2q^2 - p^2)(3q^2 - 2p^2)$$

et supposer $2q^2 - p^2$ et $3q^2 - 2p^2$ carrés, ce qui est impossible, car on en tirerait quatre carrés en progression arithmétique, savoir p^2 , q^2 , $2q^2 - p^2$, $3q^2 - 2p^2$; la raison est $q^2 - p^2$.

THÉORÈME. — *On ne saurait avoir*

$$r^2 = p^4 - p^2 q^2 + q^4.$$

Démonstration. — Si p et q sont impairs en posant

$$p + q = 2m, \quad p - q = 2n,$$

l'un des nombres m , n serait pair et l'autre impair, et comme on a

$$p = m + n, \quad q = m - n,$$

il en résulterait

$$r^2 = p^4 + q^4 - p^2 q^2 \\ = 2(m^4 + 6m^2 n^2 + n^4) - (m^4 - 2m^2 n^2 + n^4)$$

ou

$$r^2 = m^4 + 14m^2 n^2 + n^4,$$

ce qui est impossible.

Si des nombres p, q l'un est pair et l'autre impair, on fera

$$p + q = m, \quad p - q = n;$$

m et n seront impairs, on aura

$$2p = m + n, \quad 2q = m - n;$$

par suite

$$16r^2 = (m + n)^4 - (m^2 - n^2)^2 + (m - n)^4 \\ = m^4 + 14m^2 n^2 + n^4,$$

ce qui est impossible.

Le même mode de démonstration s'étend à beaucoup d'équations biquadratiques de la forme

$$r^2 = x^4 + ax^2 y^2 + by^4.$$

Il en sera question dans une autre Note.